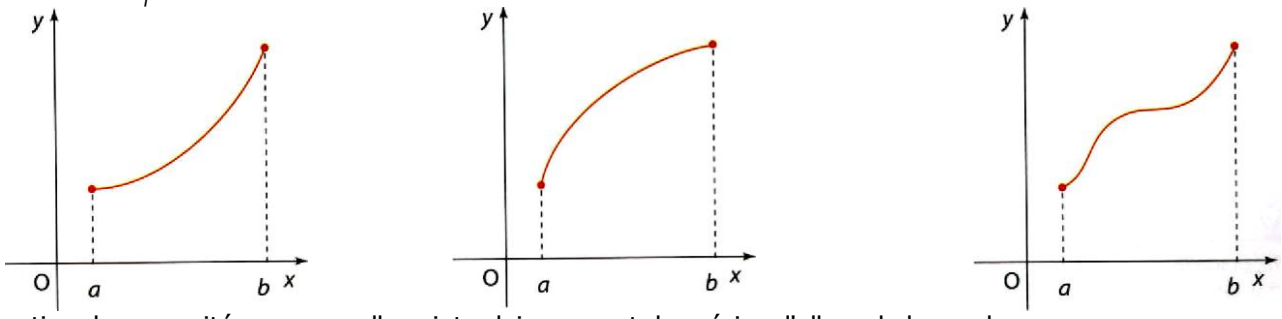
Ch.8 Fonctions convexes

1 NOTIONS DE CONVEXITÉ, DE CONCAVITÉ

1.1 Introduction

Considérons une fonction f croissante sur $[a\,;\,b]$, on sait que sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ « monte », mais on ne sait pas exactement de quelle manière.
Par exemple, $\mathcal{C}_f$ peut avoir l'une des trois allures suivantes :



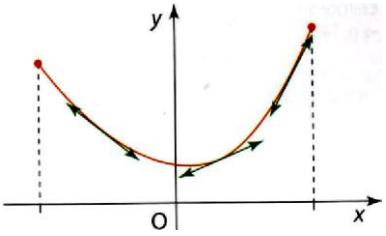
La notion de convexité que nous allons introduire permet de préciser l'allure de la courbe.

1.2 Définitions : fonction convexe, fonction concave

DÉFINITION 1

Une fonction dérivable sur un intervalle I est dite **convexe** sur cet intervalle I si sa courbe représentative est entièrement située au-dessus de chacune de ses tangentes.

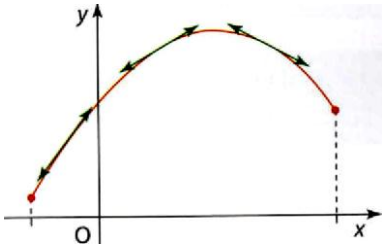
La courbe représentative d'une fonction convexe a l'allure représentée ci-contre.



DÉFINITION 2

Une fonction dérivable sur un intervalle I est dite **concave** sur cet intervalle I si sa courbe représentative est entièrement située au-dessous de chacune de ses tangentes.

La courbe représentative d'une fonction concave a l'allure représentée ci-contre.



OBJECTIF 1 : *Reconnaître graphiquement des fonctions convexes, concaves - Reconnaître graphiquement un point d'inflexion*

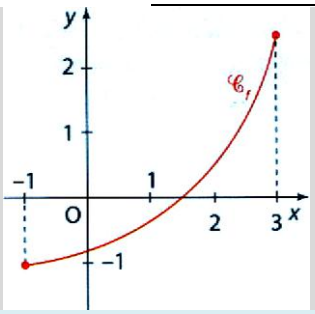
f est une fonction dérivable sur un intervalle I.

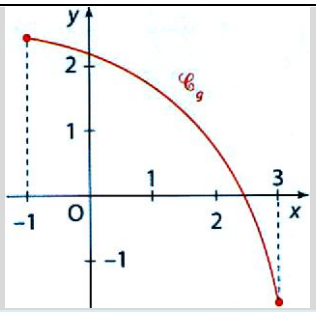
- f est **convexe** sur I si sa courbe représentative est située au-dessus de chacune de ses tangentes.
- f est **concave** sur I si sa courbe représentative est située en dessous de chacune de ses tangentes.
- Un **point d'inflexion** de la courbe représentative de f est un point où la courbe traverse sa tangente.

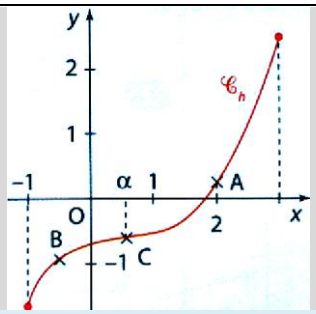
Exercice résolu n°A page 131

1) Les courbes $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_h$ ci-dessous sont les courbes représentatives de trois fonctions f, g et h définies sur $\mathrm{I} = [-1\,;\,3]$. Pour chacune de ces courbes, dites si elle semble convexe sur I, concave sur I, ou ni convexe, ni concave sur I.

2) Dans ce dernier cas, indiquez les intervalles où la courbe semble convexe ou concave et donnez une valeur approchée des coordonnées du ou des points d'inflexion.







➢ Méthode

Une remarque générale : dans ce type d'exercice, les réponses sont données avec la perception permise par le graphique.

1) Il s'agit de savoir comment est située la courbe par rapport aux tangentes en chacun de ses points.

2) Il est commode de repérer les points d'inflexion, c'est-à-dire les points où la courbe traverse la tangente, pour déterminer les intervalles sur lesquels la fonction est convexe ou concave.

➢ Solution

➔ **1)**
- La fonction f est convexe sur I car $\mathscr{C}_f$ est située au-dessus de chacune de ses tangentes.
- La fonction g est concave sur I car $\mathscr{C}_g$ est située au-dessous de chacune de ses tangentes.
- La fonction h n'est ni convexe ni concave sur I, en effet en certains points, A par exemple, la courbe est située au-dessus de la tangente, en d'autres points, B par exemple, elle est située en dessous.

➔ **2)** D'après le graphique, il y a un seul point où la courbe $\mathscr{C}_h$ traverse la tangente, c'est le point C dont l'abscisse α est sensiblement égale à $\frac{1}{2}$.

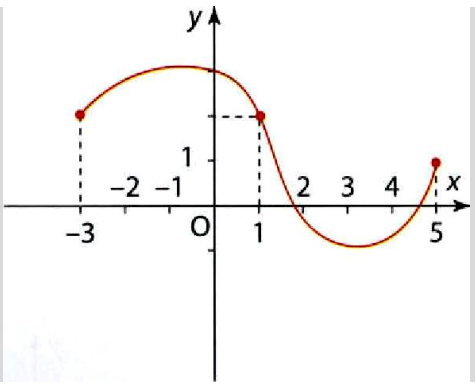
La fonction h est concave sur $[-1\ ;\ \alpha]$ et convexe sur $[\alpha\ ;\ 3]$.

Exercice n°1 page 132

$\mathrm{I} = [-3\ ;\ 5]$

Indiquez pour la courbe, si la fonction correspondante est convexe sur I, concave sur I, ni convexe ni concave sur I.

Dans ce dernier cas indiquez le ou les points d'inflexion et les intervalles sur lesquels f est convexe ou concave.



f est concave sur $[-3\ ;\ 1]$ et convexe sur $[1\ ;\ 5]$, donc f est ni convexe ni concave sur I.

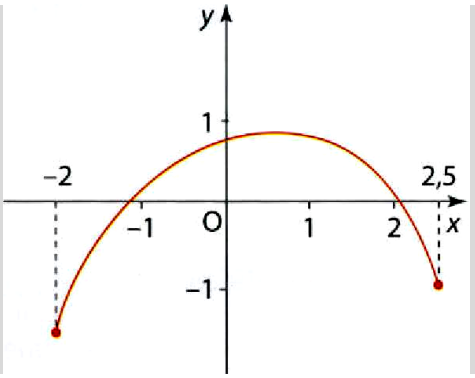
Le point d'abscisse 1 est un point d'inflexion.

Exercice n°2 page 132

$\mathrm{I} = [-2\ ;\ 2{,}5]$

Indiquez pour la courbe, si la fonction correspondante est convexe sur I, concave sur I, ni convexe ni concave sur I.

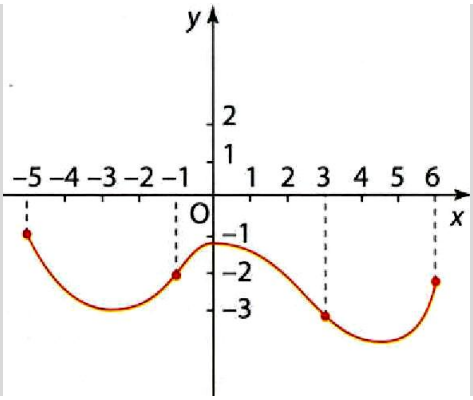
Dans ce dernier cas indiquez le ou les points d'inflexion et les intervalles sur lesquels f est convexe ou concave.



f est concave sur $[-2\ ;\ 2{,}5]$.

Exercice n°3 page 132

Indiquez pour la courbe, si la fonction correspondante est convexe sur I, concave sur I, ni convexe ni concave sur I.
Dans ce dernier cas indiquez le ou les points d'inflexion et les intervalles sur lesquels f est convexe ou concave.
I = [–5 ; 6]



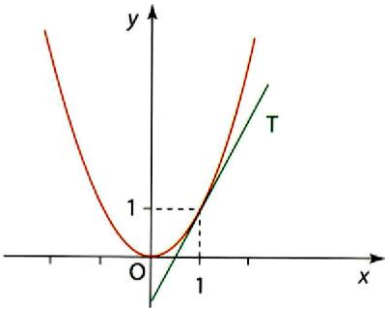
f est convexe sur [–5 ; –1] et sur [3 ; 6] et elle est concave sur [–1 ; 3], donc f est ni convexe ni concave sur I.

Les points d'abscisses respectives –1 et 3 sont des points d'inflexion.

2 CONVEXITÉ ET FONCTIONS DE RÉFÉRENCE

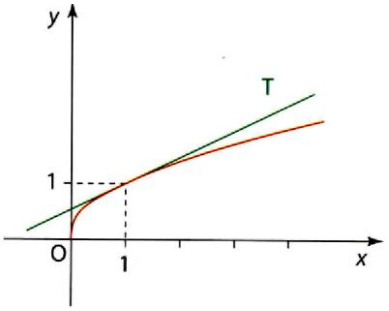
2.1 Fonction $x \longmapsto x^2$

La fonction $x \longmapsto x^2$ est **convexe** sur $\mathbb{R}$.
Sa courbe représentative est située au-dessus de chacune de ses tangentes.



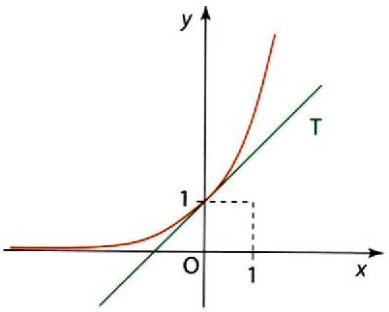
2.2 Fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$

La fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ est **concave** sur $]0 ; +\infty[$.
Sa courbe représentative est située au-dessous de chacune de ses tangentes.



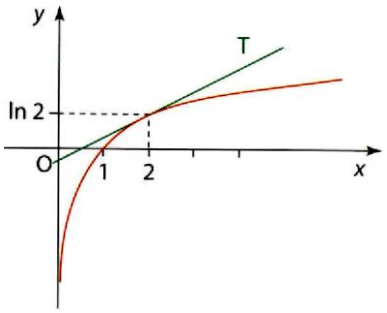
2.3 Fonction $x \longmapsto e^x$

La fonction $x \longmapsto e^x$ est **convexe** sur $\mathbb{R}$.
Sa courbe représentative est située au-dessus de chacune de ses tangentes.



2.4 Fonction $x \longmapsto \ln x$

La fonction $x \longmapsto \ln x$ est **concave** sur $]0 ; +\infty[$.
Sa courbe représentative est située au-dessous de chacune de ses tangentes.



3 PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS CONVEXES

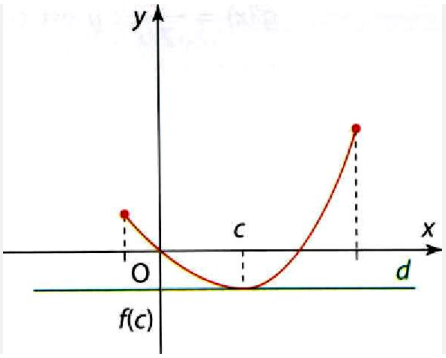
3.1 Convexité et extremum

THÉORÈME 1

Si f est une fonction convexe et dérivable sur un intervalle I et si pour un réel c de I, $f'(c) = 0$, alors f admet un minimum absolu sur I en c.

Démonstration :

Si $f'(c) = 0$, la tangente d à la courbe représentative de f au point d'abscisse c est parallèle à l'axe des abscisses.
Or f est convexe sur I, donc sa courbe représentative est située au-dessus de la droite d d'équation $y = f(c)$.
Ceci signifie que, pour tout réel x de I, $f(x) \geq f(c)$.
Ceci signifie que f admet un minimum absolu en c.



THÉORÈME 2

Si f est une fonction concave et dérivable sur un intervalle I et si pour un réel c de I, $f(c) = 0$ alors f admet un maximum absolu sur I en c.

Démonstration :

La démonstration est analogue à celle du théorème précédent.

3.2 Convexité et opérations

THÉORÈME 3

- Si f **et** g **sont deux fonctions dérivables et convexes** sur un intervalle I, alors $f + g$ **est une fonction convexe** sur I.
- Si f **est une fonction dérivable et convexe** sur un intervalle I et k un réel strictement positif, alors kf **est une fonction convexe** sur I.

THÉORÈME 4

- Si f **et** g **sont deux fonctions dérivables et concaves** sur un intervalle I, alors $f + g$ **est une fonction concave** sur I.
- Si f **est une fonction dérivable et concave** sur un intervalle I et k un réel strictement positif, alors kf **est une fonction concave** sur I.

THÉORÈME 5

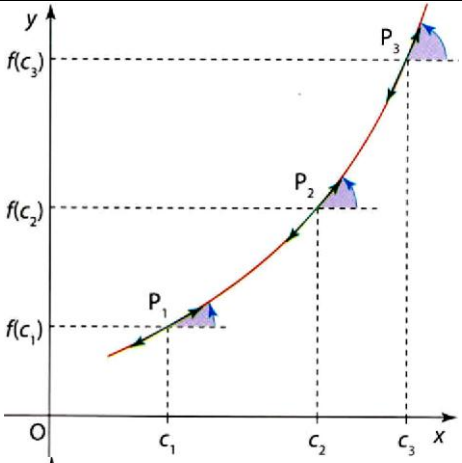
- Si f est une fonction dérivable et convexe sur un intervalle I, alors $(-f)$ est concave sur I.
- Si f est une fonction dérivable et concave sur un intervalle I, alors $(-f)$ est convexe sur I.

4 CONVEXITÉ DE f ET SENS DE VARIATION DE f

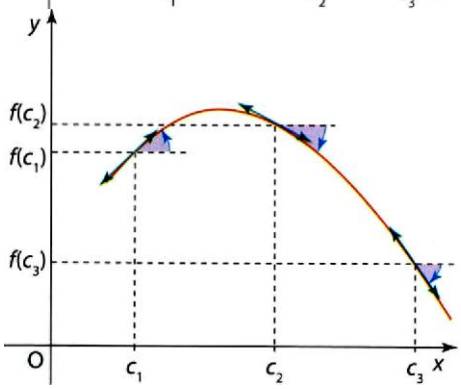
4.1 Une conjecture

- Fonction f $x \longmapsto x^2$.
  $f'(x) = 2x$; f est convexe sur $\mathbb{R}$ et on peut remarquer que sa dérivée est croissante sur $\mathbb{R}$.
- Fonction $g : x \longmapsto \sqrt{x}$.
  $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; g est concave sur $]0 ; +\infty[$ et on peut remarquer que sa dérivée est décroissante sur $]0 ; +\infty[$.

- Plus généralement, il semble que lorsque la fonction f est convexe sur I, sa dérivée est croissante sur I.
Le coefficient directeur des tangentes au point $\mathrm{P}(c\,;f(c))$ croît quand c croît.



- Il semble également que lorsque la fonction f est concave sur I, sa dérivée f' est décroissante sur I.
Le coefficient directeur des tangentes au point $\mathrm{P}(c\,;f(c))$ décroît quand c croît.



4.2 Lien entre convexité et sens de variation de la dérivée

THÉORÈME 6

f est une fonction dérivable sur un intervalle I. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :
- f est convexe sur I ;
- f' est croissante sur I.

THÉORÈME 7

f est une fonction dérivable sur un intervalle I. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :
- f est concave sur I ;
- f' est décroissante sur I.

Remarque :

Conformément au programme ces deux théorèmes sont admis.

4.3 Utilisation de la dérivée seconde

THÉORÈME 8

f est une fonction définie sur $]a\,;b[$, si la dérivée seconde f'' existe sur $]a\,;b[$ alors :
- Si, pour tout réel x de $]a\,;b[$, $f''(x) \geq 0$ alors f est convexe sur $]a\,;b[$.
- Si, pour tout réel x de $]a\,;b[$, $f''(x) \leq 0$ alors f est concave sur $]a\,;b[$.

Démonstration :

1) On sait que, si la dérivée g' d'une fonction g est positive sur $]a\,;b[$ alors g est croissante sur $]a\,;b[$.
Appliquons cette propriété dans le cas où $g = f'$, alors $g' = f''$.
Donc si pour tout réel x de $]a\,;b[$, $f''(x) \geq 0$, f' est croissante sur $]a\,;b[$ donc d'après le théorème 6, f est convexe sur $]a\,;b[$.

2) La démonstration est analogue, on utilise cette fois le théorème 7 et la propriété suivante : si la dérivée g' d'une fonction g est négative sur $]a\,;b[$ alors g est décroissante sur $]a\,;b[$.

Remarque :

Ce théorème est vrai si $a = -\infty$ ou $b = +\infty$.

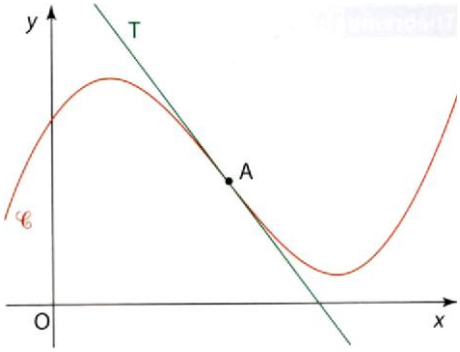
5 POINT D'INFLEXION

5.1 Définition

DÉFINITION 3

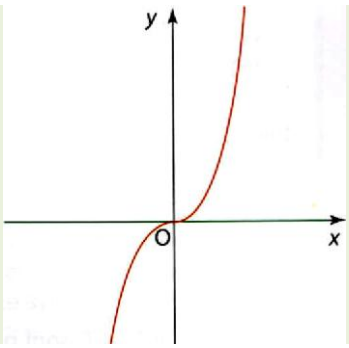
Un **point d'inflexion** d'une courbe est un point où **la courbe traverse la tangente**.

T est la tangente à $\mathcal{C}$ au point A.
A est un point d'inflexion.



Exemple :

Fonction $x \longmapsto x^3$.
L'origine O du repère est un point d'inflexion de la courbe représentative de la fonction $f : x \longmapsto x^3$.
En effet $f'(x) = 3x^2$ donc $f'(0) = 0$, donc la tangente à la courbe au point O est l'axe des abscisses.
La courbe traverse la tangente en O donc O est un point d'inflexion.



5.2 Utilisation de la dérivée seconde

THÉORÈME 9

f est une fonction définie sur $]a\,;\,b[$ et telle que f'' existe sur $]a\,;\,b[$.
Si **f'' s'annule en c en changeant de signe**, le point **$A(c\,;\,f(c))$ est un point d'inflexion** de la courbe représentative de f.

L'idée de la démonstration :

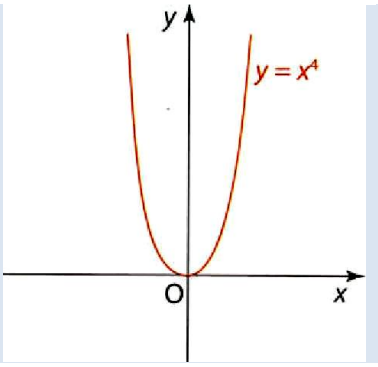
D'après le théorème 8, la fonction f est concave d'un côté du point A et convexe de l'autre côté.
On conçoit alors que la courbe traverse sa tangente au point d'abscisse c.

Mise en garde.

La condition $f''(c) = 0$ n'implique pas en général que le point $A(c\,;\,f(c))$ est un point d'inflexion. C'est vrai si en plus f'' change de signe en A.

Exemple.

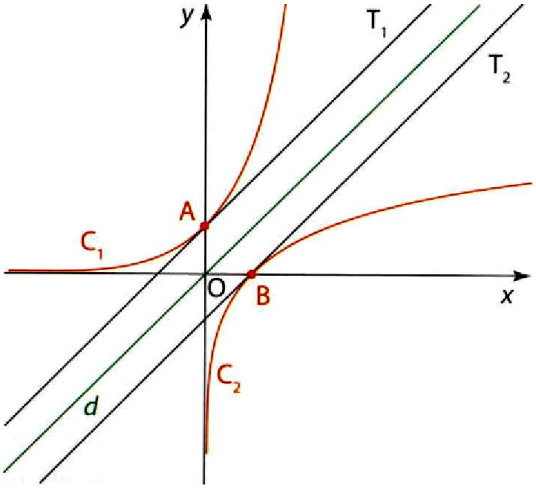
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4$ et dont la courbe représentative est tracée ci-contre.
$f'(x) = 4x^3$ et $f''(x) = 12x^2$ donc $f''(0) = 0$, or le point $O(0\,;\,0)$ n'est pas un point d'inflexion.



6 POSITION RELATIVE DES COURBES REPRÉSENTATIVES DES FONCTIONS $x \longmapsto e^x$, $x \longmapsto \ln x$, $x \longmapsto x$

THÉORÈME 10

C_1 est la courbe représentative de la fonction exponentielle.
C_2 est la courbe représentative de la fonction logarithme népérien.
d est la droite d'équation $y = x$.
Alors C_1 et C_2 sont situées de part et d'autre de d.
C_1 est au-dessus de d et C_2 est au-dessous de d.



Démonstration :

On sait que $\exp'(x) = \exp(x)$, d'où pour $x = 0$, $\exp'(0) = 1$, donc la tangente T_1 à la courbe représentative de la fonction exp au point $A(0 ; 1)$ a pour coefficient directeur 1.

De même on sait que $\ln'(x) = \frac{1}{x}$, d'où pour $x = 1$, $\ln'(1) = 1$, donc la tangente T_2 à la courbe représentative de la fonction ln au point $B(1 ; 0)$ a pour coefficient directeur 1.

Or la fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$ donc sa courbe représentative est située au-dessus de T_1.

De même la fonction logarithme népérien est concave sur $]0 ; +\infty[$ donc sa courbe représentative est située au-dessous de T_2 .

Or T_1 et T_2 sont parallèles à la droite d et situées de part et d'autre de d d'où le résultat.

Exercice n°8 page 134

On pose $f(x) = x^4 - 24x^2 + 5$ pour $x \in \mathbb{R}$.

1) Étudiez les variations de la fonction dérivée f'.

2) **a)** Quels sont les intervalles où la fonction f est convexe ? Concave ?
b) Précisez les coordonnées des points d'inflexion éventuels.

1) $f'(x) = 4x^3 - 48x$.
$f''(x) = 12x^2 - 48 = 12(x^2 - 4) = 12(x - 2)(x + 2)$.

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
f''		$+$	0	$-$	0	$+$	
f'		↗		↘		↗	

2) f est convexe sur $]-\infty , -2]$ et sur $[2 , +\infty[$, f est concave sur $[-2 , 2]$.

3) Deux points d'inflexion : A$(-2 , -75)$ et B$(2 , -75)$.

Exercice n°9 page 134

On pose $f(x) = 2 \ln x + x^2$ pour $x \in]0 ; +\infty[$.

1) Étudiez les variations de la fonction dérivée f'.

2) **a)** Quels sont les intervalles où la fonction f est convexe ? Concave ?
b) Précisez les coordonnées des points d'inflexion éventuels.

1) $f'(x) = 2 \times \frac{1}{x} + 2x = \frac{2}{x} + 2x$.

$f''(x) = 2 \times \frac{-1}{x^2} + 2 = \frac{-2}{x^2} + 2 = \frac{2(-1 + x^2)}{x^2} = \frac{2(x^2 - 1)}{x^2} = \frac{2(x - 1)(x + 1)}{x^2}$.

x	0		1		$+\infty$
$f''(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	‖	↘		↗	

2) **a)** f est convexe sur $]1 , +\infty[$ et concave sur $]0 , 1[$.

b) Un point d'inflexion : A$\boxed{(1\ ;\ 1)}$.

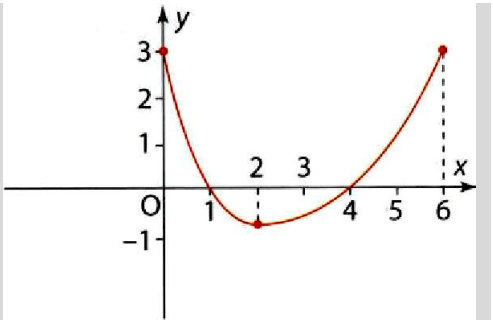
Exercice n°10 page 134

f est une fonction deux fois dérivable sur $[0\ ;\ 6]$. On connaît la courbe représentative de la fonction f'' tracée ci-contre.

1) Donnez, en justifiant votre réponse, le tableau de variation de la fonction dérivée f'.

2) Indiquez, en justifiant votre réponse, les intervalles où la fonction f est convexe ou concave.

3) Précisez les abscisses des points d'inflexion éventuels.



1)

x	0		1		4		6
$f''(x)$		+	0	−	0	+	
$f'(x)$	↗		↘		↗		

2) f' est croissante sur $[0\ ;\ 1]$ et sur $[4\ ;\ 6]$, donc f est convexe sur $\boxed{[0\ ,\ 1]}$ et sur $\boxed{[4\ ,\ 6]}$.

f' est décroissante sur $[1\ ;\ 4]$ donc f est concave sur $\boxed{[1\ ,\ 4]}$.

3) f'' s'annule en changeant de signe pour $x = 1$ et $x = 4$, donc les points d'abscisses respectives $\boxed{1 \text{ et } 4}$ sont deux points d'inflexion.

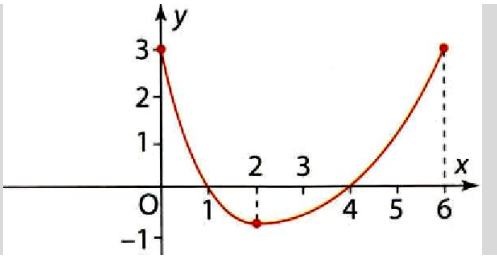
Exercice n°11 page 134

f est une fonction dérivable sur $[0\ ;\ 6]$ qui vérifie $f(2) = 5$. On connaît la courbe représentative de la fonction f', tracée ci-contre.

1) Indiquez en justifiant votre réponse les intervalles où la fonction f est convexe ou concave.

2) Précisez les coordonnées des points d'inflexion éventuels.

3) Donnez l'allure d'une courbe possible pour f.



1) f' est décroissante sur $[0\ ;\ 2]$ donc f est concave sur $\boxed{[0\ ,\ 2]}$.

f' est croissante sur $[2\ ;\ 6]$ donc f est convexe sur $\boxed{[2\ ,\ 6]}$.

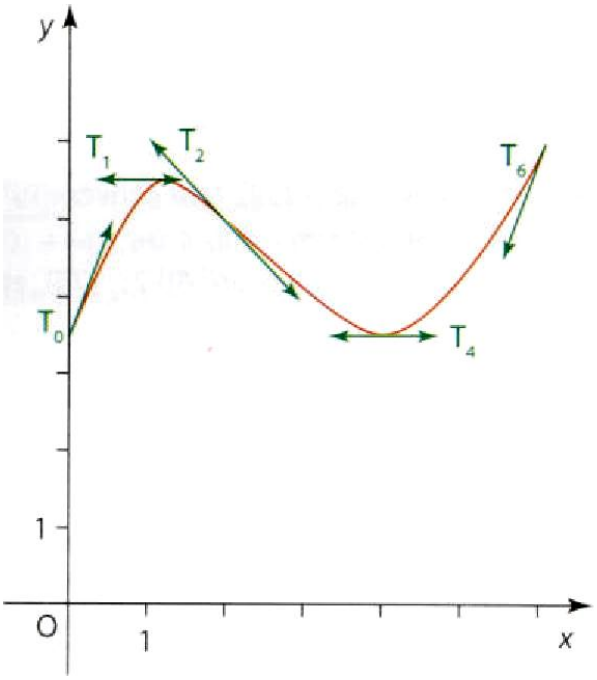
2) Sur $[0\ ;\ 2]$ f' est décroissante, donc f'' est négative.
Sur $[2\ ;\ 6]$ f' est croissante, donc f'' est positive.
La courbe $\mathcal{C}_{f'}$ admet au point $A(2\ ;\ -1)$ une tangente parallèle à l'axe des abscisses, donc $f''(2) = 0$.

f'' s'annule en 2 en changeant de signe, donc le point B$\boxed{(2\ ;\ 5)}$ est un point d'inflexion.

3)

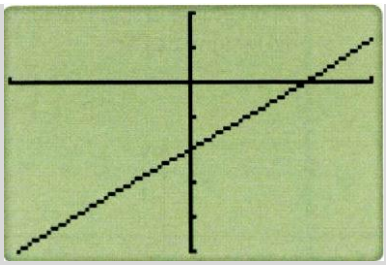
x	0		1	2	4		6
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	↗			↘ 5		↗	

- Au point $B(2\ ;\ 5)$ la courbe admet une tangente T_2 de coefficient directeur $f'(2) = -1$; f est concave sur $]0\ ;\ 2[$ et convexe sur $[2\ ;\ 6[$ et B est un point d'inflexion donc $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de T_2 sur $]0\ ;\ 2[$ et au-dessus sur $]2\ ;\ 6[$.
- La courbe $\mathcal{C}_f$ admet des tangentes parallèles à $(x'Ox)$ aux points d'abscisses respectives 1 et 4 ; on les note T_1 et T_4.
- Au point d'abscisse 0 la courbe admet une tangente T_0 de coefficient directeur 3. De même au point d'abscisse 6 (tangente T_6).



Exercice n°12 page 134

On a tracé ci-contre à l'aide d'une calculatrice la courbe de la fonction f définie sur $[-1 ; 1]$ par $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2} + 2x - 3$.



1) La courbe obtenue permet-elle d'émettre des conjectures précises sur la convexité ou la concavité de f ?

2) **a)** Étudiez les variations de la fonction dérivée de f'.

b) Quels sont les intervalles où la fonction f est convexe ? Concave ?

c) Précisez les coordonnées des points d'inflexion éventuels.

1) Le tracé est trop imprécis pour permettre des conjectures précises.

2) **a)** $f'(x) = e^x - x + 2$.

$f''(x) = e^x - 1$.

D'où le tableau :

x	-1		0		1
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$\frac{1}{e} - \frac{11}{2}$	↘	-2	↗	$e - \frac{3}{2}$

b) f est donc convexe sur $[0 , +\infty[$ et concave sur $]-\infty , 0]$.

c) Le point $I(0 , -2)$ est un point d'inflexion.

Objectif 2 : *Utiliser le lien entre convexité et sens de variation de la dérivée*

f est une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

  f est convexe sur $\Leftrightarrow$ f' est croissante sur I.
- Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

  f est concave sur $I \Leftrightarrow$ f' est décroissante sur I.

Exercice résolu n°B page 133

On pose $f(x) = x^3 - 6x^2 + 3x + 1$, pour $x \in \mathbb{R}$.

1) Étudiez les variations de la fonction dérivée f'.

2) **a)** Quels sont les intervalles où la fonction f est convexe ? Concave ?

b) Précisez les coordonnées des points d'inflexion éventuels.

3) À l'aide de votre calculatrice, vérifiez que les résultats précédents sont cohérents avec l'allure de la courbe représentative de f.

Méthode

1) Pour étudier les variations d'une fonction f', on étudie le signe de sa dérivée, c'est-à-dire ici le signe de f''.

2) **a)** Il suffit d'utiliser les théorèmes 6 et 7 pages 128-129.

b) On utilise la dérivée seconde pour trouver les points d'inflexion.

3) On programme la fonction sur la calculatrice. Les coordonnées du point d'inflexion sont $(2 ; -9)$. On choisit la fenêtre de sorte que le point A soit visible sur l'écran.

Solution

1) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 3x + 1$.

$f'(x) = -12x + 3$.

$f''(x) = 6x - 12$.

D'où le signe de f'' et le sens de variation de f'.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$	↘		-9		↗

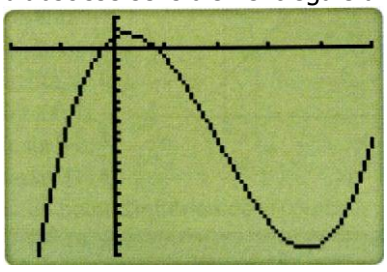
2) **a)** f' est décroissante sur $]-\infty ; 2[$, donc f est concave sur $]-\infty ; 2[$.

f' est croissante sur $]2 ; +\infty[$, donc f est convexe sur $]2 ; +\infty[$.

b) La fonction f'' s'annule en 2, en changeant de signe. Donc la courbe admet un point d'inflexion au point d'abscisse 2, c'est-à-dire au point $A(2 ; -9)$.

3) La courbe obtenue sur la calculatrice à l'allure ci-dessous pour $-2 \leq x \leq 5$ et $-20 \leq y \leq 3$.

On peut vérifier que la courbe admet un point d'inflexion au point A d'abscisse sensiblement égale à 2.



Exercice n°37 page 138

f est une fonction dérivable et concave sur $\mathbb{R}$. Sa tangente au point d'abscisse -1 a pour équation $y = 2x + 1$.
Justifiez les inégalités suivantes :

1) $f(0) \leq 1$. **2)** $f(-2) \leq 0$.

1) La courbe représentative de f est au-dessous de toutes ses tangentes sur $\mathbb{R}$
Donc, pour tout réel x, on a $f(x) \leq 2x + 1$.
En particulier $f(0) \leq 2 \times 0 + 1$, soit $f(0) \leq 1$.

2) De même $f(-2) \leq 2 \times (-2) + 1$, soit $f(-2) \leq 0$.

Exercice n°40 page 139

f est une fonction dérivable et convexe sur $\mathbb{R}$. Sa tangente au point d'abscisse 1 a pour équation $y = -2x + 1$.
Les inégalités suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1) $f(0) > 0$. **2)** $f(3) < -5$. **3)** $f(-2) \geq 5$.

1) La courbe représentative de f est au-dessus de toutes ses tangentes, donc, pour tout réel x, $f(x) \geq -2x + 1$.
En particulier $f(0) \geq -2 \times 0 + 1$, donc $f(0) \geq 0$ est vraie.

2) De même $f(3) \geq -2 \times 3 + 1$, donc $f(3) < -5$ est fausse.

3) Et aussi $f(-2) \geq -2 \times (-2) + 1$, donc $f(-2) \geq 5$ est vraie.

Exercice n°41 page 139

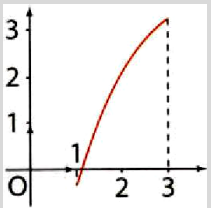
Cet exercice de cette rubrique ne nécessite pas de calculatrice.
On note f la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

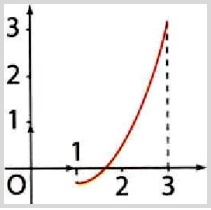
$$f(x) = \frac{1}{4}e^x - \sqrt{x}.$$

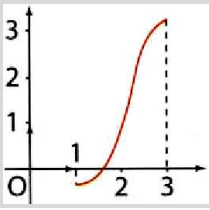
1)
a) Expliquez pourquoi les fonctions $x \longmapsto \frac{1}{4}e^x$ et $x \longmapsto -\sqrt{x}$ sont convexes sur $]0 ; +\infty[$.
b) Déduisez-en que f est convexe sur $]0 ; +\infty[$.

2)
a) Calculez $f'(x)$.
b) Montrez que f est strictement croissante sur $[1 ; 3]$.

3) On sait que la courbe représentative de f sur $[1 ; 3]$ est l'une des trois courbes ci-contre. Laquelle est la courbe représentative de f ? Justifiez votre réponse.







1) **a)**
- $(x \longmapsto e^x)$ est convexe sur $[1 ; 3]$, donc $\left(x \longmapsto \frac{1}{4}e^x\right)$ est convexe sur $[1 ; 3]$.
- $x \longmapsto \sqrt{x}$ est concave sur $[1 ; 3]$, donc $x \longmapsto -\sqrt{x}$ est convexe sur $[1 ; 3]$.

b) f est la somme de deux fonctions convexes sur $[1 ; 3]$.
Elle est convexe sur $[1 ; 3]$.

2)
a) $f'(x) = \boxed{\frac{1}{4}e^x - \frac{1}{2\sqrt{x}}}$.

b) f est convexe sur $[1 ; 3]$, donc f' est croissante sur $[1 ; 3]$;
$f'(1) = \frac{1}{4}e - \frac{1}{2} > 0$, donc $f'(x) > 0$ sur $[1 ; 3]$ et f est strictement croissante sur $[1 ; 3]$.

3) Seule la deuxième courbe correspond à une fonction convexe.

Exercice n°42 page 139

Cet exercice de cette rubrique ne nécessite pas de calculatrice.
On note f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = 6 \ln x - \frac{1}{8}e^x.$$

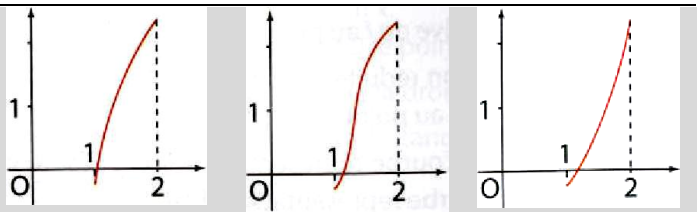
1) Montrez que f est concave sur $]0 ; +\infty[$.

Aide

On pourra utiliser les propriétés relatives aux opérations sur les fonctions concaves.

2) Montrez que f est croissante sur $[1 ; 2]$.

3) Parmi les trois courbes ci-contre, laquelle est la courbe représentative de f sur $[1 ; 2]$?



1) $(x \longmapsto \ln x)$ est concave sur $]0 ; +\infty[$, donc $(x \longmapsto 6 \ln x)$ aussi.

$(x \longmapsto e^x)$ est convexe sur $]0 ; +\infty[$, donc $\left(x \longmapsto \dfrac{-1}{8} e^x\right)$ est concave sur $]0 ; +\infty[$.

f est la somme de ces deux fonctions concaves, donc elle est concave.

2) f est concave sur $[1 ; 2]$, donc f' est décroissante sur $[1 ; 2]$.

$f'(x) = \dfrac{6}{x} - \dfrac{1}{8} e^x$ et $f'(2) = 3 - \dfrac{1}{8} e^2 > 0$.

Pour $x \in [1 ; 2]$, $f'(x) > f'(2)$, donc $f'(x) > 0$ et f est strictement croissante sur $[1 ; 2]$.

3) Seule la première courbe correspond à une fonction concave.

Exercice n°44 page 139

Cet exercice de cette rubrique ne nécessite pas de calculatrice.

f est une fonction convexe sur $\mathbb{R}$.

Montrez que la fonction g, définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = f(x) - \ln x$, est convexe sur son ensemble de définition.

- f est convexe sur $]0 ; +\infty[$.
- $(x \longmapsto \ln x)$ est concave sur $]0 ; +\infty[$, donc $(x \longmapsto -\ln x)$ est convexe sur $]0 ; +\infty[$.

g est la somme de ces deux fonctions convexes, elle est convexe sur $]0 ; +\infty[$.

Exercice n°50 page 139

Cet exercice de cette rubrique ne nécessite pas de calculatrice.

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$.

1) Donnez une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 4.

2) Déduisez-en que pour tout réel x, $e^x \geq (x - 3)e^4$.

1) La tangente à la courbe au point d'abscisse 4 a pour équation : $y = e^4(x - 4) + e^4$, soit $\boxed{y = e^4(x - 3)}$.

2) On sait que $(x \longmapsto e^x)$ est convexe sur $\mathbb{R}$, sa courbe est au-dessus de toutes ses tangentes, donc $e^x \geq e^4(x - 3)$.

Exercice n°51 page 140

Cet exercice de cette rubrique ne nécessite pas de calculatrice.

f est la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \ln x$.

1) Donnez une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse e.

2) Déduisez-en que pour tout réel x, $\ln x \leq \dfrac{x}{e}$.

1) La tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse e a pour équation : $y = \dfrac{1}{e}(x - e) + 1$, soit $y = \dfrac{x}{e}$.

2) La fonction ln est concave sur $]0 ; +\infty[$, donc sa courbe est au-dessous de toutes ses tangentes et $\ln x \leq \dfrac{x}{e}$.

Exercice n°53 page 140

Cet exercice de cette rubrique ne nécessite pas de calculatrice.

f est la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

1) Donnez une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 4.

2) Déduisez-en sans calculatrice que $\sqrt{5} \leq 2{,}25$.

1) La tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 4 a pour équation $y = \dfrac{1}{4}(x - 4) + 2$, soit $\boxed{y = \dfrac{1}{4}x + 1}$.

2) La fonction $(x \longmapsto \sqrt{x})$ est concave sur $]0 ; +\infty[$, donc sa courbe représentative est au-dessous de toutes ses tangentes.

On a : $\sqrt{x} \leq \dfrac{1}{4}x + 1$, d'où $\sqrt{5} \leq \dfrac{1}{4} \times 5 + 1$, soit $\sqrt{5} \leq 2{,}25$.

Exercice n°55 page 140

Cet exercice de cette rubrique ne nécessite pas de calculatrice.

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

1) Donnez une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 10.

2) Déduisez-en sans calculatrice que $(10{,}1)^2 \geq 102$.

1) La tangente à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f au point d'abscisse 10 a pour équation : $y = 20(x - 10) + 100$, soit $y = 20x - 100$.

2) La fonction $(x \longmapsto x^2)$ est convexe sur $\mathbb{R}$, donc $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de toutes ses tangentes.

Donc $x^2 \geq 20x - 100$ et $(10{,}1)^2 \geq 202 - 100$.

Exercice n°59 page 140 *Position relative des courbes représentatives des fonctions $x \longmapsto e^x$ et $x \longmapsto \sqrt{x}$*

Cet exercice de cette rubrique ne nécessite pas de calculatrice.

1) Donnez l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de la fonction exponentielle au point d'abscisse 0.

2) Donnez l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de la fonction racine carrée au point d'abscisse $\frac{1}{4}$.

3) En utilisant les résultats précédents, justifiez que sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ la courbe représentative de la fonction exponentielle est au-dessus de celle de la fonction racine.

1) L'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de la fonction exponentielle au point d'abscisse 0 est $\boxed{y = x + 1}$.

2) L'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction racine au point d'abscisse $\frac{1}{4}$ est $\boxed{y = x + \frac{1}{4}}$.

3)
- La fonction exponentielle est convexe, donc sa courbe représentative est au-dessus de toutes ses tangentes, donc $e^x \geq x + 1$ sur $\mathbb{R}$.
- La fonction racine est concave sur $]0 ; +\infty[$, donc sa courbe représentative est au-dessous de toutes ses tangentes, donc $\sqrt{x} \leq x + \frac{1}{4}$.

Sur $]0 ; +\infty[$, on a $\sqrt{x} \leq x + \frac{1}{4} \leq x + 1 \leq e^x$ et $e^0 > \sqrt{0}$.

Par conséquent, la courbe représentative de la fonction racine est au-dessous de la courbe représentative de l'exponentielle.

Exercice n°71 page 142

f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^2 - 16x + 15$.
Calculez $f''(x)$ et déduisez-en les intervalles où f est convexe ou concave et les points d'inflexion éventuels.

$f'(x) = 8x - 16$; $f''(x) = \boxed{8}$.

f est $\boxed{\text{convexe sur } \mathbb{R}}$.

x	$-\infty$ $\quad\quad$ $+\infty$
$f''(x)$	+
f	convexe

Exercice n°73 page 142

f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 3x^2 + 7x + 1$.
Calculez $f''(x)$ et déduisez-en les intervalles où f est convexe ou concave et les points d'inflexion éventuels.

$f'(x) = 3x^2 + 6x + 7$; $f''(x) = \boxed{6x + 6}$.

f est $\boxed{\text{concave sur }]-\infty , -1[}$ et

$\boxed{\text{convexe sur }]-1 , +\infty[}$.

x	$-\infty$ $\quad$ -1 $\quad$ $+\infty$	
$f''(x)$	$-$	0 $\quad$ +
f	concave	convexe

Il y a un point d'inflexion, le point $\boxed{A(-1 , -4)}$.

Exercice n°76 page 142

f définie sur par $f(x) = x^4 - 12x^3 + 6x^2 + 4$.
Calculez $f''(x)$ et déduisez-en les intervalles où f est convexe ou concave et les points d'inflexion éventuels.

$f'(x) = 4x^3 - 36x^2 + 12x$; $f''(x) = \boxed{12x^2 - 72x + 12} = 12(x^2 - 6x + 1)$.

Étudions le polynôme $x^2 - 6x + 1$: on a $\Delta = 36 - 4 = 32$, il y a deux racines : $\frac{6 - 4\sqrt{2}}{2} = 3 - 2\sqrt{2}$ et $\frac{6 + 4\sqrt{2}}{2} = 3 + 2\sqrt{2}$.

x	$-\infty$	$3 - 2\sqrt{2}$		$3 + 2\sqrt{2}$	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	$-$	0	+
f	convexe		concave		convexe

f est $\boxed{\text{convexe sur }]-\infty , 3 - 2\sqrt{2}[\text{ et sur }]3 + 2\sqrt{2} , +\infty[}$. f est $\boxed{\text{concave sur }]3 - 2\sqrt{2} , 3 + 2\sqrt{2}\,[}$.

Il y a deux points d'inflexion d'abscisses respectives $\boxed{(3 - 2\sqrt{2}) \text{ et } (3 + 2\sqrt{2})}$.

Exercice n°78 page 142

f définie sur par $f(x) = xe^x + x - 1$.
Calculez $f''(x)$ et déduisez-en les intervalles où f est convexe ou concave et les points d'inflexion éventuels.

$f'(x) = e^x + xe^x + 1$.

$f''(x) = e^x + e^x + xe^x = \boxed{e^x(x+2)}$.

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
f		concave		convexe	

f est $\boxed{\text{concave sur }]-\infty\,;-2[}$ et

$\boxed{\text{convexe sur }]-2\,;+\infty[}$.

Il y a un point d'inflexion d'abscisse $\boxed{-2}$.

Exercice n°84 page 142

f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 - 6x^2$.
Étudiez les variations de la fonction f et calculez f'' ; déduisez-en les intervalles où f est convexe ou concave et les points d'inflexion éventuels.

$f'(x) = 4x^3 - 12x = 4x(x^2 - 3)$.

f est $\boxed{\text{décroissante sur }]-\infty\,;-\sqrt{3}[\text{ et sur }]0\,;\sqrt{3}[}$ et f est $\boxed{\text{croissante sur }]-\sqrt{3}\,;0[\text{ et sur }]\sqrt{3}\,;+\infty[}$.

$f''(x) = \boxed{12x^2 - 12} = 12(x^2 - 1) = 12(x-1)(x+1)$.

f est $\boxed{\text{convexe sur }]-\infty\,;-1[\text{ et sur }]1\,;+\infty[}$ et f est $\boxed{\text{concave sur }]-1\,;1[}$.

Deux points d'inflexion d'abscisses respectives $\boxed{-1 \text{ et } 1}$.

Exercice n°86 page 142

f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2}$.
Étudiez les variations de la fonction f et calculez f'' ; déduisez-en les intervalles où f est convexe ou concave et les points d'inflexion éventuels.

$$f'(x) = \frac{1 \times x^2 - 2x(x-1)}{(x^2)^2} = \frac{x^2 - 2x^2 + 2x}{x^4} = \frac{-x^2 + 2x}{x^4} = \frac{x(-x+2)}{x^4} = \frac{-x+2}{x^3}.$$

f est $\boxed{\text{croissante sur }]0\,;2[}$ et $\boxed{\text{décroissante sur }]-\infty\,;0[\text{ et }]2\,;+\infty[}$.

$$f''(x) = \frac{-1 \times x^3 - 3x^2(-x+2)}{(x^3)^2} = \frac{-x^3 + 3x^3 - 6x^2}{x^6} = \frac{2x^3 - 6x^2}{x^6} = \frac{2x^2(x-3)}{x^6} = \boxed{\frac{2(x-3)}{x^4}}.$$

f est $\boxed{\text{convexe sur }]3\,;+\infty[}$ et f est $\boxed{\text{concave sur }]-\infty\,;0[\text{ et }]0\,;3[}$.

Exercice n°104 page 146 *Exercice commenté*

➔ **Rédigez la solution de cet exercice en vous aidant des conseils.**

On note f la fonction définie sur $[1\,;4]$ par :

$$f(x) = 2\sqrt{x} - \frac{1}{2}e^x.$$

1) Montrez que f est une fonction concave sur $[1\,;4]$.

2) **a)** Calculez $f'(x)$.

b) Donnez une valeur approchée de $f(1)$.

3) Déduisez des questions précédentes que f est strictement décroissante sur $[1\,;4]$.

4) Montrez que l'équation $f(x) = 0$ possède une solution unique α sur $[1\,;4]$.
Donnez une valeur approchée à 10^{-2} près de cette solution.

- **Analyser l'énoncé**
On reconnaît les fonctions de référence $x \longmapsto \sqrt{x}$ et $x \longmapsto e^x$.

- **Analyser l'énoncé**
On se « doute » que l'on devra démontrer que, pour tout x de $[1\,;4]$, $f'(x) < 0$, en utilisant les questions précédentes.

- **Analyser l'énoncé**
On devra certainement utiliser la propriété des valeurs intermédiaires.

Conseils

1) On utilise le fait que $x \longmapsto \sqrt{x}$ est concave sur $]0\,;+\infty[$ donc sur $[1\,;4]$ et que la fonction $x \longmapsto e^x$ est convexe sur donc sur $[1\,;4]$.
On utilise ensuite les résultats suivants :
- Quand on multiplie une fonction convexe par un nombre négatif, on obtient une fonction concave.
- La somme de deux fonctions concaves est une fonction concave.

2) **b)** On vérifie aisément que $f'(1) < 0$.

3) On utilise le fait que f' est décroissante sur $[1\,;4]$.

4) On utilise la propriété des valeurs intermédiaires sur l'intervalle $[1\,;4]$.
On obtient une valeur approchée de α par dichotomie par exemple, ou en utilisant la fonction TABLE de la calculatrice.

Commentaire
En multipliant une fonction convexe par un nombre négatif, on obtient une fonction concave (et non pas convexe).

Attention !
Il est inutile de déterminer le signe de $f'(x)$ directement à partir de son écriture.

1) La fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ est concave sur $[0 ; +\infty[$ donc sur $[1 ; 4]$, la fonction $x \longmapsto e^x$ est convexe sur $\mathbb{R}$ donc la fonction $x \longmapsto \frac{-1}{2}e^x$ est concave sur $[1 ; 4]$.

Par conséquent la fonction f, somme de deux fonctions concaves est concave sur $[1 ; 4]$.

2) **a)** $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2}e^x$.

b) $f'(1) = 1 - \frac{e}{2} \approx -1{,}718$.

3) f est concave sur $[1 ; 4]$ donc f' est décroissante sur $[1 ; 4]$. Or $f'(1) < 0$ donc $f'(x) < 0$ sur $[1 ; 4]$. Par conséquent f est strictement décroissante sur $[1 ; 4]$.

f est continue sur $[1 ; 4]$ comme somme de fonctions continues. f est strictement décroissante sur $[1 ; 4]$.

$f(1) = 2 - \frac{e}{2}$ donc $f(1) > 0$ et $f(4) = 4 - \frac{e^4}{2}$ donc $f(4) < 0$. On peut appliquer la propriété des valeurs intermédiaires : l'équation $f(x) = 0$ possède donc une unique solution α sur $[1 ; 4]$.

À l'aide de la calculatrice, on obtient : $\alpha \in [1{,}63 ; 1{,}64]$.

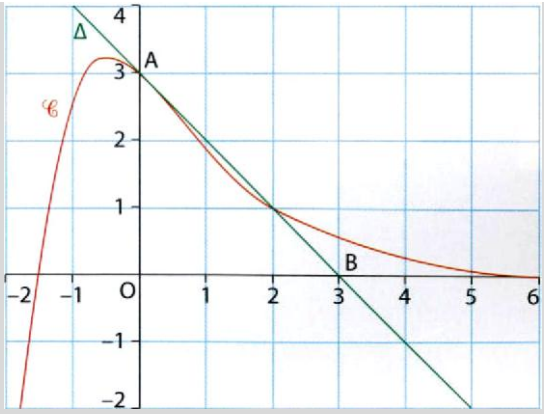
Exercice n°107 page 147 *Étude d'une fonction*

La courbe $\mathcal{C}$ ci-contre représente dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (ax + b)e^{-x},$$

où a et b sont des nombres réels.

La droite Δ est la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 0. Cette tangente passe par le point B de coordonnées $(3 ; 0)$.



1) **a)** Déterminez graphiquement $f(0)$.

b) Déterminez graphiquement $f'(0)$.

c) La fonction f semble convexe sur $[0 ; 6]$, en est-il ainsi ? Justifiez sans calculs votre réponse.

2) **a)** Exprimez $f'(x)$ en fonction de a et b.

b) À l'aide des résultats des questions **1.a)** et **1.b)**, déterminez a et b.

c) Calculez $f''(x)$.

d) Indiquez l'intervalle de $\mathbb{R}$ sur lequel f est convexe et celui sur lequel f est concave.

e) Justifiez que $\mathcal{C}$ possède un point d'inflexion et donnez une équation de la tangente en ce point.

1) **a)** $\mathcal{C}$ passe par le point $A(0 ; 3)$, donc $f(0) = \boxed{3}$.

b) Δ a pour coefficient directeur -1, donc $f'(0) = \boxed{-1}$.

c) $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de sa tangente Δ pour $0 < x < 3$ et au-dessus pour $3 < x < 6$.

La fonction n'est $\boxed{\text{ni convexe, ni concave}}$ sur $[0 ; 6]$.

2) **a)** $f'(x) = ae^{-x} + (-e^{-x})(ax + b) = \boxed{(-ax + a - b)\,e^{-x}}$.

b) $f(0) = (a \times 0 + b)e^{-0} = b$, et on a trouvé $f(0) = 3$, donc $\boxed{b = 3}$.

$f'(0) = (-a \times 0 + a - 3)e^{-0} = a - 3$, et on a trouvé $f'(0) = -1$, donc $\boxed{a = 2}$.

c) $f(x) = (2x + 3)e^{-x}$ et $f'(x) = (-2x + 2 - 3)e^{-x} = (-2x - 1)e^{-x}$.

$f''(x) = -2e^{-x} + (-e^{-x})(-2x - 1) = (-2 + 2x + 1)e^{-x} = \boxed{(2x - 1)\,e^{-x}}$.

d) f'' est positive sur $]\frac{1}{2} ; +\infty[$ et négative sur $]-\infty ; \frac{1}{2}[$,

donc f est convexe sur $\boxed{]\frac{1}{2}, +\infty[}$ et f est concave sur $\boxed{]-\infty, \frac{1}{2}[}$.

e) f'' s'annule et change de signe pour $x = \frac{1}{2}$, donc il y a un point d'inflexion d'abscisse $\frac{1}{2}$ et d'ordonnée $f\left(\frac{1}{2}\right) = 4e^{-0,5}$.

$f'\left(\frac{1}{2}\right) = \left(-2 \times \frac{1}{2} - 1\right)e^{-0,5} = -3e^{-0,5}$, donc la tangente a pour équation $y = -3e^{-0,5}\left(x - \frac{1}{2}\right) + 4e^{-0,5}$,

soit $\boxed{y = \left(-3x + \frac{11}{2}\right)e^{-0,5}}$.