Ch.1 : Second degré

Partir d'un bon pied

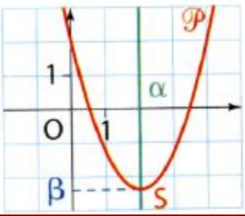
RAPPELS DE 2NDE

Note
Du fait de l'axe de symétrie, **l'abscisse α du sommet** est **la demi-somme** des abscisses de deux points de $\mathscr{P}$ de même ordonnée.

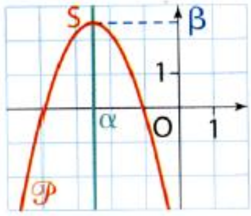
DÉFINITION f est la fonction $x \mapsto a(x-\alpha)^2+\beta$ avec $a \neq 0$.
Dans un repère orthonormé, la représentation graphique de f est une parabole $\mathscr{P}$ de sommet $S(\alpha ; \beta)$.

On admet que cette parabole $\mathscr{P}$ **a pour axe de symétrie la droite passant par le sommet S et parallèle à l'axe des ordonnées.**

- Si $a > 0$, la parabole $\mathscr{P}$ est tournée « vers le haut ».



- Si $a < 0$, la parabole $\mathscr{P}$ est tournée « vers le bas ».

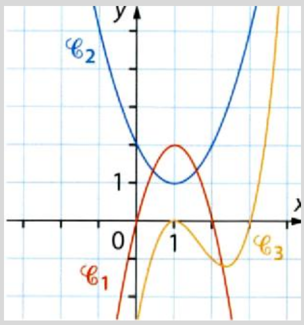


Exercice n°A page 18 : Reconnaître une fonction polynôme de degré 2

Vrai ou faux ? On donne les tableaux de variations de deux fonctions polynômes de degré 2. Leurs représentations graphiques sont tracées parmi les trois courbes ci-dessous.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g(x)$	↗	2	↘

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	↘	1	↗



Préciser si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1) $\mathscr{C}_3$ représente une fonction polynôme de degré 2.
2) $\mathscr{C}_1$ est la représentation graphique de la fonction g.
3) $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sont des paraboles ayant le même axe de symétrie.
4) La forme canonique de $f(x)$ est $(x+1)^2-1$.

1) $\boxed{\text{Faux}}$, car la courbe $\mathscr{C}_3$ n'est pas une parabole.
2) $\boxed{\text{Vrai}}$, car la courbe $\mathscr{C}_1$ est une parabole dont le sommet a pour coordonnées $(1 ; 2)$.
3) $\boxed{\text{Vrai}}$, car les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sont des paraboles dont les sommets ont la même abscisse 1, elles sont donc symétriques par rapport à la droite d'équation $x = 1$.
4) $\boxed{\text{Faux}}$, car la courbe $\mathscr{C}_1$ est une parabole dont le sommet a pour coordonnées $(1 ; 1)$, sa forme canonique est $(x-1)^2+1$.

Exercice n°B page 18 : Associer forme canonique et tableau de variations

Retrouver le tableau de variations de chacune des fonctions suivantes parmi les tableaux ci-dessous.

$f : x \longmapsto -(x+2)^2+3$;
$g : x \longmapsto \frac{1}{3}(x+2)^2+3$;
$h : x \longmapsto (x-2)^2+3$;
$k : x \longmapsto -2(x-2)^2+3$.

a)

x	$-\infty$	2	$+\infty$
?	↗	3	↘

b)

x	$-\infty$	2	$+\infty$
?	↘	3	↗

c)

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
?	↗	3	↘

d)

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
?	↘	3	↗

f est associé au tableau c),
g au tableau d),
h au tableau b),
k au tableau a).

Exercice n°C page 18 : Déterminer le nombre de solutions d'une équation

Vrai ou faux ? Répondre par vrai ou par faux aux affirmations suivantes.

1) L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $(x-1)^2 = 4$ est $\{3\}$.
2) L'équation $(x+1)^2 = 2$ possède deux solutions dans $\mathbb{R}$.
3) L'équation $(x+3{,}1)^2 = 1-\sqrt{3}$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.
4) L'équation $(x-1{,}5)^2 = 0$ possède deux solutions dans $\mathbb{R}$.

1) L'équation $(x-1)^2 = 4$ équivaut à :
$x-1=2$ ou $x-1=-2$
$x=3$ ou $x=-1$.
$\boxed{\text{Faux}}$, c'est $\{3 ; -1\}$.

2) L'équation $(x+1)^2 = 2$ équivaut à :
$x+1=\sqrt{2}$ ou $x+1=-\sqrt{2}$
$x=\sqrt{2}-1$ ou $x=-\sqrt{2}-1$.
$\boxed{\text{Vrai}}$.

3) Pour tout réel x, $(x+3{,}1)^2 > 0$ et $1-\sqrt{3} < 0$.
$\boxed{\text{Vrai}}$.

4) L'équation $(x-1{,}5)^2 = 0$ équivaut à :
$x-1{,}5=0$
$x=1{,}5$.
$\boxed{\text{Faux}}$, une seule solution $1{,}5$.

Exercice n°D page 18 : Utiliser les identités remarquables

Q.C.M. Préciser **la seule** réponse correcte, x désigne un réel.

1) $x^2+4x+4 = \ldots$	**a)** $(x-2)^2$	**b)** $(x+2)^2$	**c)** $(x-2)(x+2)$
2) $x^2-14x+49 = \ldots$	**a)** $(x-7)(x+7)$	**b)** $(x+7)^2$	**c)** $(x-7)^2$
3) $(x-1)^2-9 = \ldots$	**a)** $(x-4)(x+2)$	**b)** $(x-10)(x+8)$	**c)** $(x+4)(x-2)$
4) $x^2+6x = \ldots$	**a)** $(x+3)^2-9$	**b)** $(x+3)^2$	**c)** $(x-3)^2-9$

1) $x^2+4x+4 =$
$x^2+2\times x\times 2+2^2 =$
$(x+2)^2$.
Réponse $\boxed{\text{b}}$.

2) $x^2-14x+49 =$
$x^2-2\times x\times 7+7^2 =$
$(x-7)^2$.
Réponse $\boxed{\text{c}}$.

3) $(x-1)^2-9 =$
$(x-1)^2-3^2 =$
$((x-1)-3)((x-1)+3) =$
$(x-4)(x+2)$.
Réponse $\boxed{\text{a}}$.

4) $x^2+6x =$
$x^2+2\times x\times 3+3^2-3^2 =$
$(x+3)^2-9$.
Réponse $\boxed{\text{a}}$.

Activité n°1 page 20 : Forme canonique

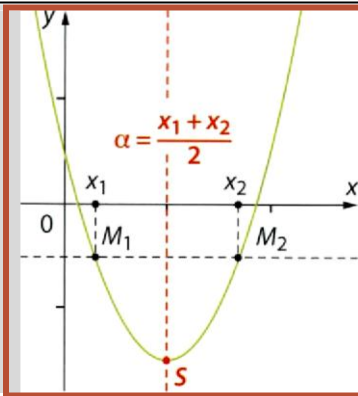
Si $f : x \longmapsto ax^2+bx+c$ (où $a \neq 0$) est un trinôme du second degré, alors il existe un couple de réels $(\alpha ; \beta)$ unique tel que, pour tout réel x :

$$f(x) = a(x-\alpha)^2+\beta.$$

Cette écriture est appelée la « **forme canonique** » **de** f.

1) On considère les fonctions polynômes de degré 2 suivantes :
$f : x \longmapsto 2x^2+6x+3$ et $g : x \longmapsto -3x^2+5x+1$.
Utiliser la propriété rappelée ci-contre pour traiter les questions suivantes.
a) Résoudre l'équation $f(x) = 3$. Indiquer deux points ayant même ordonnée sur la parabole représentant f, et en déduire la valeur de α. Calculer alors β et écrire la forme canonique de $f(x)$.
b) Après avoir résolu l'équation $g(x) = 1$, déterminer la forme canonique de $g(x)$.

Rappel Dans un repère orthogonal du plan, la parabole représentant une fonction polynôme de degré 2 a pour axe de symétrie la droite parallèle à l'axe des ordonnées passant par son sommet. Si deux points de la parabole M_1 et M_2, d'abscisses respectives x_1 et x_2, ont la même ordonnée alors le sommet a pour abscisse $\alpha = \dfrac{x_1+x_2}{2}$.



1) a)

- $f(x) = 3$ équivaut à :
  $2x^2 + 6x + 3 = 3$
  $2x^2 + 6x = 0$
  $2x(x + 3) = 0$
  $2x = 0$ ou $x + 3 = 0$
  $x = \boxed{0}$ ou $x = \boxed{-3}$.
- Les points d'$\boxed{\text{abscisses } 0 \text{ et } -3}$ ont la même ordonnée 3 sur la parabole représentant f.
- D'où $\alpha = \dfrac{0 + (-3)}{2} = \boxed{-1{,}5}$.
- $\beta = f(\alpha) = f(-1{,}5) = 2(-1{,}5)^2 + 6(-1{,}5) + 3 = \boxed{-1{,}5}$.
- $f(x) = 2(x - \alpha)^2 + \beta = \boxed{2(x + 1{,}5)^2 - 1{,}5}$.

b) $g(x) = 1$ équivaut à :
$-3x^2 + 5x + 1 = 1$
$-3x^2 + 5x = 0$
$x(-3x + 5) = 0$
$x = 0$ ou $-3x + 5 = 0$
$x = \boxed{0}$ ou $x = \boxed{\dfrac{5}{3}}$.

D'où $\alpha = \dfrac{0 + \frac{5}{3}}{2} = \dfrac{5}{3} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{6}$ et $\beta = g\left(\dfrac{5}{6}\right) = -3\left(\dfrac{5}{6}\right)^2 + 5\left(\dfrac{5}{6}\right) + 1 = \dfrac{-25}{12} + \dfrac{25}{6} + 1 = \dfrac{-25 + 50 + 12}{12} = \dfrac{37}{12}$.

$g(x) = \boxed{-3\left(x - \dfrac{5}{6}\right)^2 + \dfrac{37}{12}}$.

2) Utiliser les identités remarquables pour répondre aux questions suivantes.
a) Recopier et compléter : $2x^2 + 6x = 2(\ldots + \ldots) = 2[(x + \ldots)^2 - \ldots]$.
Retrouver la forme canonique de $f(x)$ obtenue au **1.a)**.
b) Reprendre la même démarche pour obtenir la forme canonique de $g(x)$.

2) a)

- $2x^2 + 6x = 2\left(\boxed{x^2} + \boxed{3x}\right)$.
  Or $x^2 + 3x = (x^2 + 2 \times x \times 1{,}5 + 1{,}5^2) - 1{,}5^2 = (x + 1{,}5)^2 - 2{,}25$,
  donc $2x^2 + 6x = 2\left(\left(x + \boxed{1{,}5}\right)^2 - \boxed{2{,}25}\right)$.
- $f(x) = 2x^2 + 6x + 3$
  $f(x) = 2\left((x + 1{,}5)^2 - 2{,}25\right) + 3$
  $f(x) = 2(x + 1{,}5)^2 - 4{,}5 + 3$
  $f(x) = 2(x + 1{,}5)^2 - 1{,}5$.

b)

- $-3x^2 + 5x = -3\left(x^2 - \dfrac{5}{3}x\right)$.
  Or $x^2 - \dfrac{5}{3}x = \left(x^2 - 2 \times x \times \dfrac{5}{6} + \left(\dfrac{5}{6}\right)^2\right) - \left(\dfrac{5}{6}\right)^2 = \left(x - \dfrac{5}{6}\right)^2 - \dfrac{25}{36}$,
  donc $-3x^2 + 5x = -3\left[\left(x - \dfrac{5}{6}\right)^2 - \dfrac{25}{36}\right]$.
- $g(x) = -3x^2 + 5x + 1$

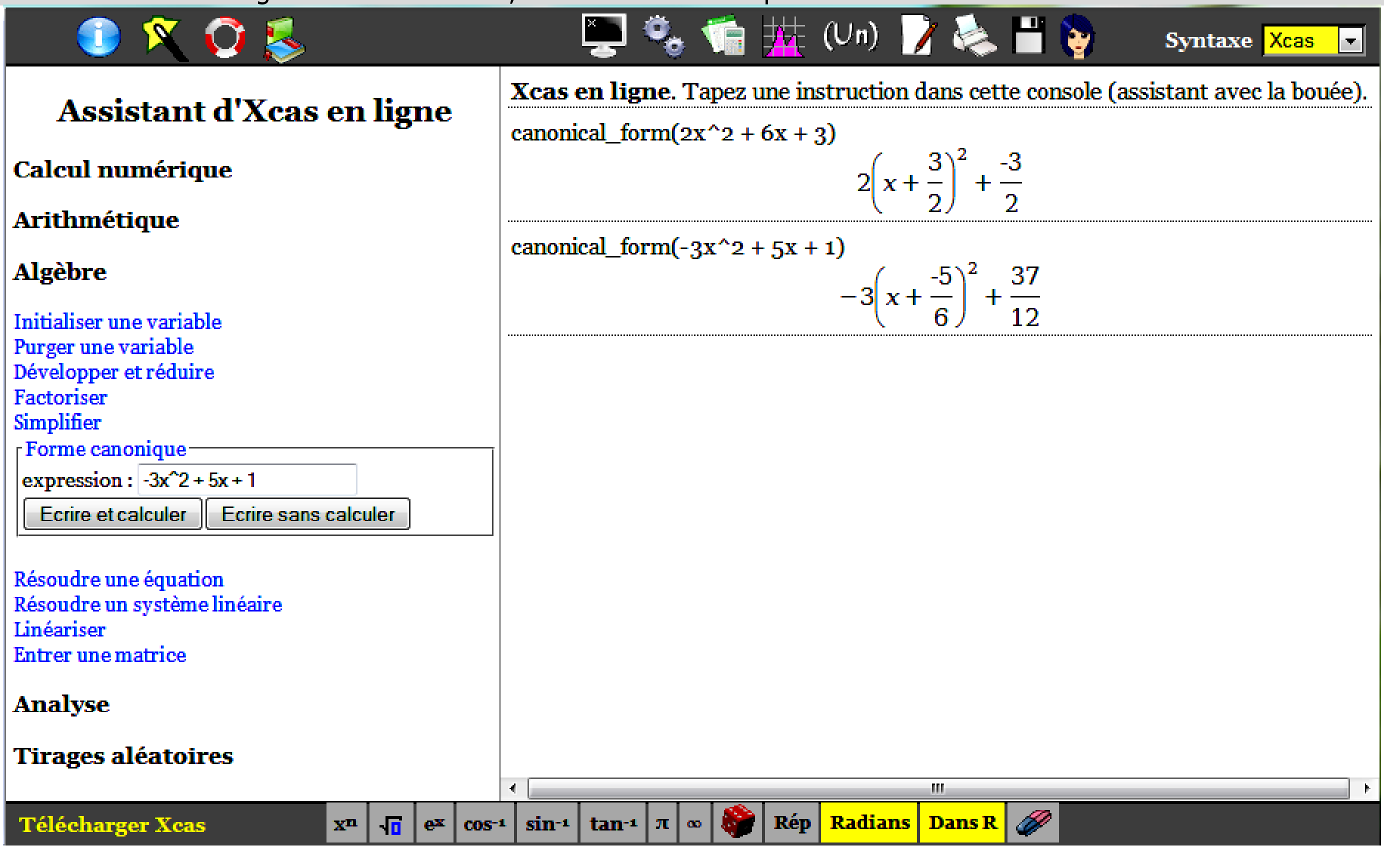
$$g(x) = -3\left[\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{25}{36}\right] + 1$$

$$g(x) = -3\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 + \frac{25}{12} + 1$$

$$g(x) = -3\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 + \frac{37}{12}.$$

3) En utilisant un logiciel de calcul formel, vérifier les résultats précédents.

3)



1 FORME CANONIQUE

On considère une fonction polynôme ou « trinôme » de degré 2

$$f : x \longmapsto ax^2 + bx + c$$

où a, b et c sont des réels fixés avec $a \neq 0$.

PROPRIÉTÉ ET DÉFINITION

- Pour tout réel x, on a :

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

  On obtient ainsi la **forme canonique** de $f(x)$.
- Le réel $b^2 - 4ac$ est appelé le **discriminant** du trinôme.

Remarque :

Le discriminant est en général noté par la lettre Δ, majuscule du δ (« delta ») de l'alphabet grec.
Ainsi : $\Delta = b^2 - 4ac$.

Démonstration : *Voir une autre démonstration à l'exercice 41, page 35.*

En partant de l'expression $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$ et en développant le carré, on a :

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = a\left[x^2 + 2 \times x \times \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

$$= a\left(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

$$= ax^2 + bx + \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

$$= ax^2 + bx + c.$$

Exemple :

Soit : $g(x) = -2x^2 + 7x + 11$.
On calcule le discriminant :
$\Delta = 7^2 - 4 \times (-2) \times 11 = 49 + 88 = 137$.
On en déduit :

$$g(x) = -2\left(x + \frac{7}{2 \times (-2)}\right)^2 - \frac{137}{4(-2)}$$

$$g(x) = -2\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 + \frac{137}{8}.$$

$g(x)$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = -2$, $b = 7$ et $c = 11$.
On applique la formule $\Delta = b^2 - 4ac$.

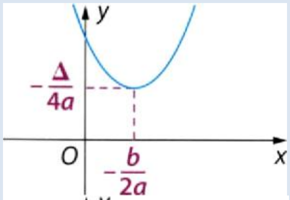
On applique la formule :

$$g(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}.$$

Conséquences :

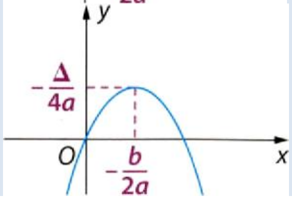
- **La parabole** représentant f dans un repère orthogonal du plan admet pour **axe de symétrie** la droite d'équation $x = \dfrac{-b}{2a}$ et pour **sommet** le point de coordonnées $\left(\dfrac{-b}{2a}, \dfrac{-\Delta}{4a}\right)$.
- **Lorsque $a > 0$**, on a :

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	↘	$-\dfrac{\Delta}{4a}$	↗



- **Lorsque $a < 0$**, on a :

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	↗	$-\dfrac{\Delta}{4a}$	↘



Exercice corrigé : ***obtenir une forme canonique***

On donne les fonctions polynômes du second degré suivantes :
$f : x \longmapsto 1{,}5x^2 + 3x - 4{,}5$, $\quad g : x \longmapsto -2x^2 - 5x - 2$ $\quad$ et $\quad h : x \longmapsto 2x^2 + 4x - 7$.
Déterminer la forme canonique de chacune en utilisant trois méthodes différentes.

Solution :

- On calcule le discriminant :
  $\Delta = 3^2 - 4 \times 1{,}5 \times (-4{,}5) = 9 + 27 = 36$.
  D'où, pour tout réel x :
  $$f(x) = 1{,}5\left(x + \frac{3}{2 \times 1{,}5}\right)^2 - \frac{36}{4 \times 1{,}5} = 1{,}5(x+1)^2 - 6.$$

Méthode :
Pour utiliser les formules, on repère les valeurs nécessaires : $a = 1{,}5$, $b = 3$ et $c = -4{,}5$.
Puis on utilise les formules $\Delta = b^2 - 4ac$ et $a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a}$.

- Pour la forme canonique de g, on résout d'abord l'équation $g(x) = -2$:
  $-2x^2 - 5x - 2 = -2$
  $-2x^2 - 5x = 0$
  $x(-2x - 5) = 0$
  $x = 0$ ou $-2x - 5 = 0$
  $x = 0$ ou $x = \dfrac{-5}{2}$.

  Ainsi $g(0) = g\left(\dfrac{-5}{2}\right) = -2$, et on calcule : $\alpha = \dfrac{0 + \frac{-5}{2}}{2} = \dfrac{-5}{4}$.
  On calcule ensuite β :
  $$\beta = g(\alpha) = -2 \times \left(\frac{-5}{4}\right)^2 - 5 \times \frac{-5}{4} - 2 = \frac{-25}{8} + \frac{25}{4} - 2 = \frac{-25 + 50 - 16}{8} = \frac{9}{8}.$$
  On obtient : $g(x) = -2\left(x - \dfrac{-5}{4}\right)^2 + \dfrac{9}{8}$.

On utilise la propriété de symétrie de la parabole : dans un repère orthogonal du plan, si deux points M_1 et M_2 de la parabole, d'abscisses respectives x_1 et x_2, ont la même ordonnée, alors le sommet a pour abscisse $\alpha = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$.
On utilise la forme canonique vue en seconde : $a(x - \alpha)^2 + \beta$.

- Pour la forme canonique de h, on factorise par 2 les deux premiers termes : $h(x) = 2(x^2 + 2x) - 7$.
  On considère $x^2 + 2x$ comme le début du développement du produit remarquable $(x+1)^2$, soit : $h(x) = 2[(x+1)^2 - 1] - 7$.
  On obtient : $h(x) = 2(x+1)^2 - 2 - 7 = 2(x+1)^2 - 9$.

Après avoir factorisé $ax^2 + bx$ par a, on considère $x^2 + \dfrac{b}{a}x$ comme le début du développement d'une identité remarquable.
On peut redévelopper de tête pour vérifier le calcul.

Exercice n°1 page 23

Calculer le discriminant de chacun des trinômes suivants :

a) $2x^2 + x - 5$. **b)** $-x^2 + 7x + 3$. **c)** $1{,}2x^2 + 0{,}4x + 2{,}3$. **d)** $\frac{-3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$.

a) $2x^2 + x - 5$ est un trinôme du type $ax^2 + bx + c$ avec $\begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = -5 \end{cases}$.

On a alors : $\Delta = 1^2 - 4 \times 2 \times (-5) = 1 + 40 = \boxed{41}$.

b) $-x^2 + 7x + 3$ est un trinôme du type $ax^2 + bx + c$ avec $\begin{cases} a = -1 \\ b = 7 \\ c = 3 \end{cases}$.

On a alors : $\Delta = 7^2 - 4(-1) \times 3 = 49 + 12 = \boxed{61}$.

c) $1{,}2x^2 + 0{,}4x + 2{,}3$ est un trinôme du type $ax^2 + bx + c$ avec $\begin{cases} a = 1{,}2 \\ b = 0{,}4 \\ c = 2{,}3 \end{cases}$.

On a alors : $\Delta = 0{,}4^2 - 4 \times 1{,}2 \times 2{,}3 = 0{,}16 - 11{,}04 = \boxed{-10{,}88}$.

d) $\frac{-3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ est un trinôme du type $ax^2 + bx + c$ avec $\begin{cases} a = \frac{-3}{2} \\ b = \frac{1}{2} \\ c = \frac{-1}{4} \end{cases}$.

On a alors : $\Delta = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \times \frac{-3}{2} \times \frac{-1}{4} = \frac{1}{4} - \frac{3}{2} = \frac{1}{4} - \frac{6}{4} = \frac{-5}{4} = \boxed{-1{,}25}$.

Exercice n°2 page 23

En utilisant la propriété du cours, donner la forme canonique de chacun des trinômes de l'exercice 1 :

a) $2x^2 + x - 5$. **b)** $-x^2 + 7x + 3$. **c)** $1{,}2x^2 + 0{,}4x + 2{,}3$. **d)** $\frac{-3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$.

a) On applique la formule $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$ avec $\begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = -5 \end{cases}$ et $\Delta = 41$.

On a alors $\frac{b}{2a} = \frac{1}{2 \times 2} = \frac{1}{4} = 0{,}25$ et $\frac{\Delta}{4a} = \frac{41}{4 \times 2} = \frac{41}{8} = 5{,}125$.

D'où $2x^2 + x - 5 = \boxed{2(x + 0{,}25)^2 - 5{,}125}$.

b) De même avec $\begin{cases} a = -1 \\ b = 7 \\ c = 3 \end{cases}$ et $\Delta = 61$, on a $\frac{b}{2a} = \frac{7}{2(-1)} = \frac{-7}{2} = -3{,}5$ et $\frac{\Delta}{4a} = \frac{61}{4(-1)} = \frac{-61}{4} = -15{,}25$.

D'où $-x^2 + 7x + 3 = \boxed{-(x - 3{,}5)^2 + 15{,}25}$.

c) De même avec $\begin{cases} a = 1{,}2 \\ b = 0{,}4 \\ c = 2{,}3 \end{cases}$ et $\Delta = -10{,}88$, on a $\frac{b}{2a} = \frac{0{,}4}{2 \times 1{,}2} = \frac{0{,}4}{2{,}4} = \frac{1}{6}$ et $\frac{\Delta}{4a} = \frac{-10{,}88}{4 - 1{,}2} = \frac{-10{,}88}{4{,}8} = \frac{-1\,088}{480} = \frac{-34}{15}$.

D'où $1{,}2x^2 + 0{,}4x + 2{,}3 = \boxed{1{,}2\left(x + \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{34}{15}}$.

d) De même avec $\begin{cases} a = \frac{-3}{2} \\ b = \frac{1}{2} \\ c = \frac{-1}{4} \end{cases}$ et $\Delta = \frac{-5}{4}$, on a $\frac{b}{2a} = \frac{\frac{1}{2}}{2 \times \frac{-3}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{-3} = \frac{1}{2} \times \frac{-1}{3} = \frac{-1}{6}$ et $\frac{\Delta}{4a} = \frac{\frac{-5}{4}}{4\left(\frac{-3}{2}\right)} = \frac{\frac{-5}{4}}{-6} = \frac{-5}{4} \times \frac{-1}{6} = \frac{5}{24}$.

D'où $\frac{-3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} = \boxed{\frac{-3}{2}\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{5}{24}}$.

Exercice n°3 page 23

Donner le tableau de variations de chacune des fonctions trinômes définies par les expressions de l'exercice 1 :

a) $2x^2 + x - 5$. **b)** $-x^2 + 7x + 3$. **c)** $1{,}2x^2 + 0{,}4x + 2{,}3$. **d)** $\frac{-3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$.

a) $2x^2 + x - 5 = 2\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{41}{8} = 2(x + 0{,}25)^2 - 5{,}125.$

x	$-\infty$	$-0{,}25$	$+\infty$
$f(x)$	↘	$-5{,}125$	↗

b) $-x^2 + 7x + 3 = -\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{61}{4} = -(x - 3{,}5)^2 + 15{,}25.$

x	$-\infty$	$3{,}5$	$+\infty$
$f(x)$	↗	$15{,}25$	↘

c) $1{,}2x^2 + 0{,}4x + 2{,}3 = 1{,}2\left(x + \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{34}{15}.$

x	$-\infty$	$\frac{-1}{6}$	$+\infty$
$f(x)$	↘	$\frac{34}{15}$	↗

d) $\frac{-3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} = \frac{-3}{2}\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{5}{24}.$

x	$-\infty$	$\frac{1}{6}$	$+\infty$
$f(x)$	↗	$\frac{-5}{24}$	↘

Exercice n°4 page 23

Résoudre l'équation $5x^2 - 6x + 2 = 2$.
En déduire la forme canonique et le tableau de variations de la fonction $x \longmapsto 5x^2 - 6x + 2$.

- $5x^2 - 6x + 2 = 2$ équivaut à :
  $5x^2 - 6x = 0$
  $x(5x - 6) = 0$
  $x = 0$ ou $5x - 6 = 0$
  $x = 0$ ou $x = \frac{6}{5}$.
  L'ensemble des solutions est S = $\boxed{\{0\,,\,1{,}2\}}$.
- Le sommet de la parable a pour abscisse $\alpha = \frac{0 + 1{,}2}{2} = 0{,}6$ et pour ordonnée $\beta = 5 \times 0{,}6^2 - 6 \times 0{,}6 + 2 = 0{,}2$.
  Donc $5x^2 - 6x + 2 = 5(x - 0{,}6)^2 + 0{,}2$.
-

x	$-\infty$	$0{,}6$	$+\infty$
$f(x)$	↘	$0{,}2$	↗

Exercice n°5 page 23

Résoudre l'équation $-x^2 + x - 2 = -2$.
En déduire les coordonnées du sommet de la parabole représentant la fonction qui à x associe $x^2 + x - 2$.

$-x^2 + x - 2 = -2$ équivaut à :
$-x^2 + x = 0$
$x(-x + 1) = 0$
$x = 0$ ou $-x + 1 = 0$
$x = 0$ ou $x = 1$.

L'ensemble des solutions de l'équation est : S = $\boxed{\{0\,,\,1\}}$.

Le sommet de la parabole a pour abscisse $\alpha = \frac{0 + 1}{2} = 0{,}5$ et pour ordonnée $\beta = -0{,}5^2 + 0{,}5 - 2 = -1{,}75$;

soit pour coordonnées $\boxed{(0{,}5\,,\,-1{,}75)}$.

Exercice n°6 page 23

Utiliser les identités remarquables pour obtenir la forme canonique des trinômes suivants :
a) $x^2 + 4x - 5$. **b)** $3x^2 - 6x - 7$. **c)** $-2x^2 + 12x + 3$. **d)** $-x^2 + 2x + 3$.

a) $x^2 + 4x - 5 =$
$(x^2 + 2 \times x \times 2 + 2^2) - 2^2 - 5 =$
$(x + 2)^2 - 4 - 5 =$
$\boxed{(x + 2)^2 - 9}$.

b) $3x^2 - 6x - 7 =$

c) $-2x^2 + 12x + 3 =$
$-2(x^2 - 6x) + 3 =$
$-2(x^2 - 2 \times x \times 3 + 3^2 - 3^2) + 3 =$
$-2\big((x - 3)^2 - 9\big) + 3 =$
$-2(x - 3)^2 + 18 + 3 =$

$3(x^2 - 2x) - 7 =$
$3\big((x^2 - 2 \times x \times 1 + 1^2) - 1^2\big) - 7 =$
$3\big((x-1)^2 - 1\big) - 7 =$
$3(x-1)^2 - 3 - 7 =$
$\boxed{3(x-1)^2 - 10}$.

$\boxed{-2(x-3)^2 + 21}$.

d) $-x^2 + 2x + 3 =$
$-(x^2 - 2x) + 3 =$
$-(x^2 - 2 \times x \times 1 + 1^2 - 1^2) + 3 =$
$-\big((x-1)^2 - 1\big) + 3 =$
$-(x-1)^2 + 1 + 3 =$
$\boxed{-(x-1)^2 + 4}$.

Exercice n°1 page 44 Utiliser les identités remarquables

u et v étant des réels à déterminer, mettre sous la forme $(x+u)^2 + v$ les expressions suivantes :

a) $x^2 - 4x + 5$; **b)** $x^2 + 6x + 2$; **c)** $x^2 + x + 10$; **d)** $x^2 - 0{,}5x + 1$.

a) $x^2 - 4x + 5 =$
$(x^2 - 2 \times x \times 2 + 2^2) - 4 + 5 =$
$(x-2)^2 - 4 + 5 =$
$\boxed{(x-2)^2 + 1}$.

b) $x^2 + 6x + 2 =$
$(x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^2) - 9 + 2 =$
$\boxed{(x+3)^2 - 7}$.

c) $x^2 + x + 10 =$
$\left(x^2 + 2 \times x \times \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) - \frac{1}{4} + 10 =$
$\boxed{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{39}{4}}$.

d) $x^2 - 0{,}5x + 1 =$
$(x^2 - 2 \times x \times 0{,}25 + 0{,}25^2) - 0{,}0625 + 1 =$
$\boxed{(x - 0{,}25)^2 + 0{,}937\,5}$.

Exercice n°2 page 44 Q.C.M.

Dans chacun des cas suivants, préciser si la fonction f est :

a) d'abord croissante, puis décroissante ;
b) d'abord décroissante, puis croissante ;
c) croissante sur $\mathbb{R}$;
d) décroissante sur $\mathbb{R}$.

1) $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$. **2)** $f(x) = -3x^2 + x + 1$. **3)** $f(x) = (x-1)^2 - (3-x)^2$. **4)** $f(x) = -3x + 5x^2$.

1) Fonction trinôme du type $ax^2 + +bx + c$ avec $a > 0$.

Réponse b : f est $\boxed{\text{d'abord décroissante, puis croissante}}$.

2) Fonction trinôme du type $ax^2 + +bx + c$ avec $a < 0$.

Réponse a : f est $\boxed{\text{d'abord croissante, puis décroissante}}$.

3) $f(x) = x^2 - 2x + 1 - (9 - 6x + x^2) = 4x - 8$.
Fonction affine du type $ax + b$ avec $a > 0$.

Réponse c : f est $\boxed{\text{croissante sur } \mathbb{R}}$.

4) Fonction trinôme du type $ax^2 + +bx + c$ avec $a > 0$.

Réponse b : f est $\boxed{\text{d'abord décroissante, puis croissante}}$.

Exercice n°3 page 44 Forme canonique et tableau de variation

Donner le tableau de variations de chacune des fonctions suivantes :

a) $f : x \longmapsto 2(x-1)^2 + 3$; **b)** $g : x \longmapsto -4(x-3)^2 - 5$; **c)** $h : x \longmapsto 5(x+2)^2 - 8$; **d)** $k : x \longmapsto 3 - (x+5)^2$.

a)

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$		↘	3	↗	

b)

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f(x)$		↗	-5	↘	

c)

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f(x)$		↘	-8	↗	

d)

x	$-\infty$		-5		$+\infty$
$f(x)$		↗	3	↘	

Les savoir-faire du chapitre

Exercice n°4 page 44 Trouver la forme canonique de $ax^2 + bx + c = f(x)$

→ Voir le **savoir-faire**, page 23.

1) Déterminer la forme canonique de $f(x)$ en utilisant la formule du cours :

a) $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$; **b)** $f(x) = -3x^2 - x + 5$.

2) Déterminer la forme canonique de $f(x)$ en utilisant la propriété de symétrie de la parabole :

a) $f(x) = -x^2 + 2x + 9$; **b)** $f(x) = 3x^2 + 2x - 7$.

3) Déterminer la forme canonique de $f(x)$ en utilisant les identités remarquables :

a) $f(x) = x^2 + 4x - 1$; **b)** $f(x) = -2x^2 + 6x + 10$.

Méthode :

❶ On calcule le discriminant et on utilise la formule : $ax^2 + bx + c = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a}$.

❷ On résout l'équation $f(x) = c$ qui a pour solutions, $x_1 = 0$ et x_2 dans $\mathbb{R}$, puis on utilise la forme canonique vue en seconde : $a(x - \alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ et $\beta = f(\alpha)$.

❸ On factorise $ax^2 + bx$ par a et on considère $x^2 + \dfrac{b}{a}x$ comme le début d'une identité remarquable.

1) **a)** $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$; $\Delta = 1$.

$f(x) = \boxed{2(x - 0{,}75)^2 - 0{,}125}$.

b) $f(x) = -3x^2 - x + 5$; $\Delta = 61$.

$f(x) = \boxed{-3\left(x + \dfrac{1}{6}\right)^2 + \dfrac{61}{12}}$.

2) On note $(\alpha ; \beta)$ les coordonnées du sommet de la parabole.

a) $f(x) = -x^2 + 2x + 9$.

$f(x) = 9$ équivaut à :

$-x^2 + 2x = 0$

$x(-x + 2) = 0$

$x = 0$ ou $-x + 2 = 0$

$x = 0$ ou $x = 2$.

D'où $\alpha = \dfrac{0 + 2}{2} = 1$ et $\beta = -1^2 + 2 \times 1 + 9 = 10$; on en déduit : $f(x) = \boxed{-(x - 1)^2 + 10}$.

b) $f(x) = 3x^2 + 2x - 7$.

$f(x) = -7$ équivaut à :

$3x^2 + 2x = 0$

$x(3x + 2) = 0$

$x = 0$ ou $3x + 2 = 0$

$x = 0$ ou $x = \dfrac{-2}{3}$.

D'où $\alpha = \dfrac{0 + \frac{-2}{3}}{2} = \dfrac{-2}{3} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{-1}{3}$ et $\beta = 3\left(\dfrac{-1}{3}\right)^2 + 2\left(\dfrac{-1}{3}\right) - 7 = \dfrac{1}{3} - \dfrac{2}{3} - 7 = \dfrac{-22}{3}$;

on en déduit : $f(x) = \boxed{3\left(x + \dfrac{1}{3}\right)^2 - \dfrac{22}{3}}$.

3) **a)** $f(x) = x^2 + 4x - 1 = (x + 2)^2 - 4 - 1 = \boxed{(x + 2)^2 - 5}$.

b) $f(x) = -2x^2 + 6x + 10 = -2(x^2 - 3x) + 10 = -2(x - 1{,}5)^2 + 4{,}5 + 10 = \boxed{-2(x - 1{,}5)^2 + 14{,}5}$.

Exercice n°25 page 34 *Vrai ou faux ?*

On désigne par $\mathscr{P}$ parabole représentant dans un repère orthogonal la fonction trinôme associée.

Préciser si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. On considère le trinôme $-3(x + 2)^2 + 15$.

1) Sa forme développée est $-3x^2 - 12x + 3$.

2) Son discriminant vaut 180.

3) La parabole $\mathscr{P}$ a les « bras tournés vers le haut ».

1) $-3(x + 2)^2 + 15 = -3(x^2 + 4x + 4) + 15 = -3x^2 - 12x - 12 + 15 = -3x^2 - 12x + 3$.

L'affirmation est $\boxed{\text{vraie}}$.

2) $\Delta = (-12)^2 - 4(-3) \times 3 = 144 + 36 = 180$.

L'affirmation est $\boxed{\text{vraie}}$.

3) $-3 < 0$, alors l'affirmation est $\boxed{\text{fausse}}$.

Exercice n°27 page 34 *Vrai ou faux ?*

On désigne par $\mathscr{P}$ parabole représentant dans un repère orthogonal la fonction trinôme associée.
Préciser si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. On considère le trinôme $ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.

1) Le sommet de $\mathscr{P}$ a pour abscisse $\dfrac{b}{2a}$.

2) Le discriminant du trinôme vaut $4ac - b^2$.

3) Sa forme canonique est $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right) - \dfrac{\Delta}{4a}$.

1) Le sommet de $\mathscr{P}$ a pour abscisse $\dfrac{-b}{2a}$.

L'affirmation est $\boxed{\text{fausse}}$, sauf si $b = 0$.

2) Le discriminant du trinôme vaut $\Delta = b^2 - 4ac$.

L'affirmation est $\boxed{\text{fausse}}$, sauf si $\Delta = 0$, c'est-à-dire $b^2 = 4ac$.

3) Sa forme canonique est $a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a}$.

L'affirmation est $\boxed{\text{fausse}}$, sauf si $a = 1$.

Exercice n°28 page 34

1) Parmi les expressions suivantes, quelles sont celles qui correspondent à un polynôme du second degré ?

$A(x) = 5x^2 - 3x + 5$; $B(x) = 3 - 2x^2$; $C(x) = 4x^3 + 5x + 2$;
$D(x) = (2x + 4)^2$; $E(x) = 5x^2 + (x + 3)^2$; $F(x) = 4x^2 - (2x + 1)^2$.

2) Dans chaque cas retenu, préciser les coefficients a, b et c.

1) Toutes les expressions correspondent à des trinômes du second degré sauf $C(x)$ de degré 3 et $F(x)$ de degré 1.

2) Pour $A(x)$, $a = \boxed{5}$, $b = \boxed{-3}$ et $c = \boxed{5}$.

Pour $B(x)$, $a = \boxed{-2}$, $b = \boxed{0}$ et $c = \boxed{3}$.

Pour $D(x)$, $a = \boxed{4}$, $b = \boxed{16}$ et $c = \boxed{16}$.

Pour $E(x)$, $a = \boxed{6}$, $b = \boxed{6}$ et $c = \boxed{9}$.

Exercice n°29 page 34

Pour chacun des trinômes suivants, calculer son discriminant, puis donner sa forme canonique en utilisant la propriété :
$ax^2 + bx + c = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a}$.

1) $x^2 + x - 8$; **2)** $-3x^2 + 2x + 0{,}25$; **3)** $2x^2 - 2x - 7$; **4)** $0{,}5x^2 - 3$.

1) $\Delta = 1^2 - 4 \times 1(-8) = 1 + 32 = \boxed{33}$ et $\dfrac{b}{2a} = \dfrac{1}{2 \times 1} = \dfrac{1}{2}$.

D'où $x^2 + x - 8 = \boxed{\left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{33}{4}} = \boxed{(x + 0{,}5)^2 - 8{,}25}$.

2) $\Delta = 2^2 - 4(-3) \times 0{,}25 = 4 + 3 = \boxed{7}$ et $\dfrac{b}{2a} = \dfrac{2}{2(-3)} = \dfrac{-1}{3}$.

D'où $-3x^2 + 2x + 0{,}25 = \boxed{-3\left(x - \dfrac{1}{3}\right)^2 + \dfrac{7}{12}}$.

3) $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 2(-7) = 4 + 56 = \boxed{60}$ et $\dfrac{b}{2a} = \dfrac{-(-2)}{2 \times 2} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$.

D'où $2x^2 - 2x - 7 = \boxed{2\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{15}{2}} = \boxed{2(x - 0{,}5)^2 - 7{,}5}$.

4) $\Delta = 0^2 - 4 \times 0{,}5(-3) = \boxed{6}$ et la forme canonique est $\boxed{0{,}5x^2 - 3}$.

Exercice n°30 page 34

Pour chacun des trinômes suivants, déterminer l'abscisse du sommet de la parabole représentant la fonction trinôme associée, en résolvant une équation. En déduire la forme canonique.

1) $5x^2 - 4x + 3$. **2)** $0{,}5x^2 + 3{,}5x$. **3)** $-2x^2 + 8x - 13$. **4)** $\frac{-2}{3}x^2 + 2x - 1$.

Coup de pouce Voir Faire le point, 2e cadre, page 32.

1) $5x^2 - 4x + 3 = 3$ équivaut à :

$5x^2 - 4x = 0$

$x = \frac{4}{5} = 0{,}8$ ou $x = 0$.

L'abscisse du sommet S est $\frac{\frac{4}{5}+0}{2} = \boxed{\frac{2}{5}} = 0{,}4$,

et son ordonnée $5 \times \left(\frac{2}{5}\right)^2 - 4 \times \frac{2}{5} + 3 = \frac{4}{5} - \frac{8}{5} + 3 = \frac{11}{5} = 2{,}2$.

Donc S(0,4 ; 2,2).

Forme canonique : $5x^2 - 4x + 3 = \boxed{5\left(x - \frac{2}{5}\right)^2 + \frac{11}{5}} = \boxed{5(x - 0{,}4)^2 + 2{,}2}$.

2) $0{,}5x^2 + 3{,}5x = 0$ équivaut à : $0{,}5x(x + 7) = 0$, soit à $x = 0$ ou $x = -7$.

L'abscisse du sommet S est $\frac{0-7}{2} = \boxed{\frac{-7}{2}} = -3{,}5$.

$0{,}5\left(\frac{-7}{2}\right)^2 + 3{,}5 \times \frac{-7}{2} = \frac{49}{8} - \frac{49}{4} = \frac{-49}{8} = -6{,}125$, donc le sommet de la parabole est : S(–3,5 ; –6,125).

Forme canonique : $0{,}5x^2 + 3{,}5x = \boxed{0{,}5\left(x + \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{49}{8}} = 0{,}5(x + 3{,}5)^2 - 6{,}125$.

3) $-2x^2 + 8x - 13 = -13$ équivaut à : $x = 0$ ou $x = 4$.

Sommet de la parabole : S($\boxed{2}$; –5).

Forme canonique : $-2x^2 + 8x - 13 = \boxed{-2(x - 2)^2 - 5}$.

4) $\frac{-2}{3}x^2 + 2x - 1 = -1$ équivaut à : $x = 0$ ou $x = 3$.

Sommet de la parabole : S($\boxed{1{,}5}$; 0,5).

Forme canonique : $\frac{-2}{3}x^2 + 2x - 1 = \boxed{\frac{-2}{3}(x - 1{,}5)^2 + 0{,}5}$.

Exercice n°31 page 34

Pour chacun des trinômes suivants, utiliser les identités remarquables pour obtenir sa forme canonique :

a) $x^2 + 3x - 4$; **b)** $-x^2 + 8x + 9$; **c)** $-2x^2 + 3x + 3$; **d)** $4x^2 + x - 1$.

a) $x^2 + 3x - 4 = (x + 1{,}5)^2 - 1{,}5^2 - 4 = \boxed{(x + 1{,}5)^2 - 6{,}25}$.

b) $-x^2 + 8x + 9 = -(x^2 - 8x) + 9 = -[(x - 4)^2 - 4^2] + 9 = \boxed{-(x - 4)^2 + 25}$.

c) $-2x^2 + 3x + 3 = -2(x^2 - 1{,}5x) + 3 = -2[(x - 0{,}75)^2 - 0{,}75^2] + 3 = \boxed{-2(x - 0{,}75)^2 + 4{,}125}$.

d) $4x^2 + x - 1 = 4(x^2 + 0{,}25x) - 1 = 4[(x + 0{,}125)^2 - 0{,}125^2] - 1 = \boxed{4(x + 0{,}125)^2 - 1{,}062\,5}$.

Exercice n°32 page 34

Donner les coordonnées du sommet des paraboles représentant les fonctions trinômes définies par l'exercice 29.

1) $x^2 + x - 8$; **2)** $-3x^2 + 2x + 0{,}25$; **3)** $2x^2 - 2x - 7$; **4)** $0{,}5x^2 - 3$.

1) Pour $x^2 + x - 8 = (x - 0{,}5)^2 - 8{,}25$, les coordonnées du sommet de la parabole sont $\boxed{(-0{,}5\ ,\ -8{,}25)}$.

2) Pour $-3x^2 + 2x + 0{,}25 = -3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{7}{12}$, les coordonnées du sommet de la parabole sont $\boxed{\left(\frac{1}{3}\ ,\ \frac{7}{12}\right)}$.

3) Pour $2x^2 - 2x - 7 = 2(x - 0{,}5)^2 - 7{,}5$, les coordonnées du sommet de la parabole sont $\boxed{(0{,}5\ ,\ -7{,}5)}$.

4) Pour $0{,}5x^2 - 3$, les coordonnées du sommet de la parabole sont $\boxed{(0\ ,\ -3)}$.

Exercice n°33 page 34

Donner le tableau de variations de chacune des fonctions trinômes définies par l'exercice 31.

a) $x^2 + 3x - 4$; **b)** $-x^2 + 8x + 9$; **c)** $-2x^2 + 3x + 3$; **d)** $4x^2 + x - 1$.

a) $x^2 + 3x - 4 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - 6{,}25$.

x	$-\infty$	$-1{,}5$	$+\infty$
$f(x)$	↘	$-6{,}25$	↗

b) $-x^2 + 8x + 9 = -(x-4)^2 + 25$.

x	$-\infty$	4	$+\infty$
$f(x)$	↗	25	↘

c) $-2x^2 + 3x + 3 = -2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{33}{8}$.

x	$-\infty$	$0{,}75$	$+\infty$
$f(x)$	↗	$4{,}125$	↘

d) $4x^2 + x - 1 = 4\left(x + \frac{1}{8}\right)^2 - \frac{17}{16}$.

x	$-\infty$	$-0{,}125$	$+\infty$
$f(x)$	↘	$-1{,}0625$	↗

Exercice n°36 page 35

Associer, en justifiant brièvement, chaque fonction à sa représentation graphique :

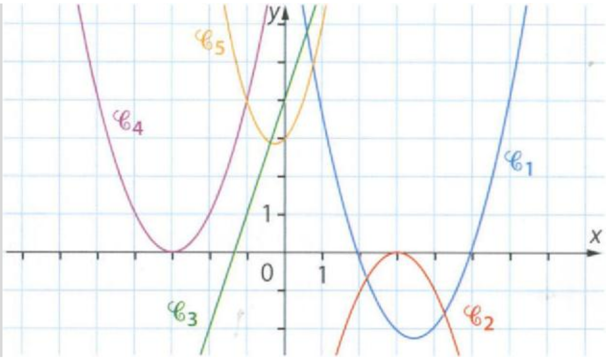
$f : x \longmapsto 3x + 4$;

$g : x \longmapsto -x^2 + 6x - 9$;

$h : x \longmapsto 2x^2 + x + 3$;

$j : x \longmapsto x^2 - 7x + 10$;

$k : x \longmapsto x^2 + 6x + 9$.



f est la seule fonction affine, donc elle est représentée par la droite $\boxed{\mathscr{C}_3}$.

g est la seule fonction trinôme ayant un maximum, donc elle est représentée par $\boxed{\mathscr{C}_2}$.

$h(0) = 3$, donc h est représentée par $\boxed{\mathscr{C}_5}$.

$j(1) = 4$, donc j est représentée par $\boxed{\mathscr{C}_1}$.

$k(1) = 16$, donc k est représentée par $\boxed{\mathscr{C}_4}$.

Exercice n°37 page 35

Proposer deux fonctions polynômes du second degré admettant le tableau de variations donné (pour chacune des fonctions, on donnera sa forme canonique et sa forme développée).

x	$-\infty$	11	$+\infty$
$f(x)$	↘	-7	↗

$f(x) = a(x-11)^2 - 7 = ax^2 - 22ax + 121a - 7$ avec $a > 0$.

Exercice n°38 page 35

Proposer deux fonctions polynômes du second degré admettant le tableau de variations donné (pour chacune des fonctions, on donnera sa forme canonique et sa forme développée).

x	$-\infty$	$-1{,}2$	$+\infty$
$f(x)$	↘	$2{,}4$	↗

$f(x) = a(x+1{,}2)^2 + 2{,}4 = ax^2 + 2{,}4ax + 1{,}44a + 2{,}4$ avec $a > 0$.

Exercice n°39 page 35

Proposer deux fonctions polynômes du second degré admettant le tableau de variations donné (pour chacune des fonctions, on donnera sa forme canonique et sa forme développée).

x	$-\infty$	$4{,}5$	$+\infty$
$f(x)$	↗	-23	↘

$f(x) = a(x-4{,}5)^2 - 23 = ax^2 - 9ax + 20{,}25a - 23$ avec $a < 0$.

Exercice n°40 page 35

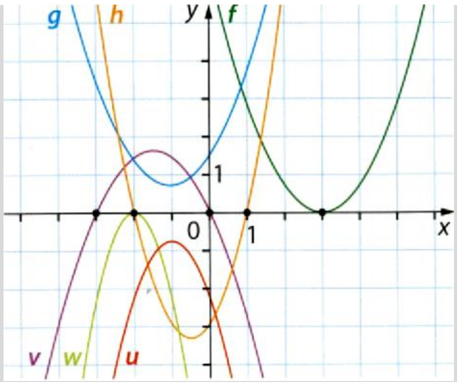
Proposer deux fonctions polynômes du second degré admettant le tableau de variations donné (pour chacune des fonctions, on donnera sa forme canonique et sa forme développée).

x	$-\infty$	-12	$+\infty$
$f(x)$	↗	80	↘

$f(x) = a(x+12)^2 + 80 = ax^2 + 24ax + 144a + 80$ avec $a < 0$.

Activité n°3 page 21 : Approche graphique

Les représentations graphiques de six fonctions polynômes de degré 2 sont tracées ci-contre.



1) Les six paraboles représentant les fonctions f, g, h, u, v et w ont des positions différentes par rapport à l'axe des abscisses.

a) Proposer une phrase pour décrire la position de chacune d'elles.

b) Peut-on tracer une parabole représentant une fonction polynôme du second degré ayant une autre position par rapport à l'axe des abscisses que les six rencontrées ici ?

1) a) Pour f, la courbe est au-dessus de l'axe des abscisses et le sommet est sur cet axe.
Pour g, la courbe est strictement au-dessus de l'axe des abscisses et donc le sommet aussi.
Pour h, la courbe traverse l'axe des abscisses et le sommet est au-dessous de cet axe.
Pour u, la courbe est strictement au-dessous de l'axe des abscisses et donc le sommet aussi.
Pour v, la courbe traverse l'axe des abscisses et le sommet est au-dessus de cet axe.
Pour w, la courbe est au-dessous de l'axe des abscisses et le sommet sur cet axe.

b) $\boxed{\text{Non}}$, on ne peut pas.

2) Lecture graphique

a) Recopier et compléter le tableau suivant :

Équation	$f(x) = 0$	$g(x) = 0$	$h(x) = 0$	$u(x) = 0$	$v(x) = 0$	$w(x) = 0$
Ensemble des solutions dans ℝ						

b) Dresser le tableau de signes de chacune des fonctions.

Note Attention de ne pas confondre tableau de signes et tableau de variations.

2) a)

Équation	$f(x) = 0$	$g(x) = 0$	$h(x) = 0$	$u(x) = 0$	$v(x) = 0$	$w(x) = 0$
Ensemble des solutions dans ℝ	$\{3\}$	$\varnothing$	$\{-2 ; 1\}$	$\varnothing$	$\{-3 ; 0\}$	$\{-2\}$

b)

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$+$	

x	$-\infty$		$+\infty$
$g(x)$		$+$	

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$h(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		$+\infty$
$u(x)$		$-$	

x	$-\infty$		-3		0		$+\infty$
$v(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$w(x)$		$-$	0	$-$	

3) À partir des résultats obtenus ci-dessus, énoncer une conjecture à propos du nombre de solutions dans ℝ d'une « équation du second degré », de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ (avec $a \neq 0$).

3) Si $\Delta > 0$, alors il y a deux solutions.
Si $\Delta = 0$, alors il y a une seule solution.
Si $\Delta < 0$, alors il n'y pas de solution.

Activité n°4 page 21 : Variations et équations

On considère une fonction polynôme du second degré f dont la forme canonique est :

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta \text{ avec } a \neq 0.$$

On rappelle les deux tableaux de variations possibles pour f :

- **lorsque $a > 0$:**

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	↘	β	↗

- **lorsque $a < 0$:**

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	↗	β	↘

1) Dans chacun des deux cas, déterminer en fonction du signe de β le nombre de solutions de l'équation $a(x - \alpha)^2 + \beta = 0$.

1)

	$\beta < 0$	$\beta = 0$	$\beta > 0$
$a < 0$	deux solutions	une solution	aucune solution
$a > 0$	aucune solution	une solution	deux solutions

2) Proposer des valeurs de a, α et β pour lesquelles l'équation $a(x - \alpha)^2 + \beta = 0$:

a) n'admet aucune solution ;

Remarque Pour chaque cas, on proposera

b) admet une seule solution ; deux choix, l'un avec $a > 0$, l'autre avec $a < 0$.

a) admet deux solutions.
Vérifier les différentes propositions formulées à l'aide d'un grapheur.

2) **a)** $\boxed{a = 2,\ \alpha = 5 \text{ et } \beta = -3}$. $\boxed{a = -2,\ \alpha = 7 \text{ et } \beta = 2{,}5}$.

b) $\boxed{a = 8,\ \alpha = -1 \text{ et } \beta = 0}$. $\boxed{a = -1{,}2,\ \alpha = -4 \text{ et } \beta = 0}$.

c) $\boxed{a = 10,\ \alpha = -3 \text{ et } \beta = 9}$. $\boxed{a = -1,\ \alpha = 5 \text{ et } \beta = -2}$.

3) Les réels a et β étant fixés, le choix de a peut-il modifier le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$?

3) Si a et b sont choisis, la valeur de a ne $\boxed{\text{peut pas}}$ modifier le nombre de solution(s) de l'équation $a(x - \alpha)^2 + \beta = 0$.

2 RÉSOLUTION D'UNE ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ

PROPRIÉTÉ 1 **Ensemble des solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$**

Soit S l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, où a, b, et c sont des réels fixés avec $a \neq 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant du trinôme.

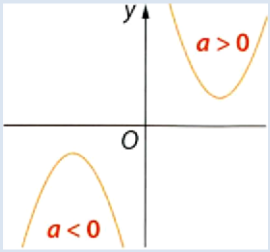
- Si $\Delta < 0$, alors $S = \varnothing$, c'est-à-dire que l'équation n'a pas de solution.
- Si $\Delta = 0$, alors l'équation admet une seule solution ; on a : $S = \left\{\dfrac{-b}{2a}\right\}$.
- Si $\Delta > 0$, alors l'équation admet deux solutions ; on a : $S = \left\{\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\,;\,\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$.

Note :

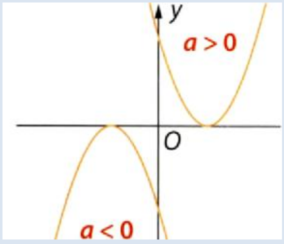
Δ porte le nom de « discriminant », car son signe permet de séparer, ou encore de « discriminer » les différents cas.

Interprétation graphique :

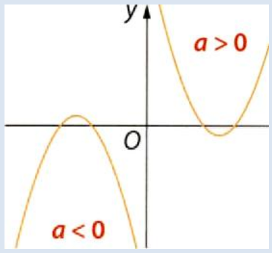
- $\Delta < 0$:



- $\Delta = 0$:



- $\Delta > 0$:



Piste de démonstration :

En utilisant la forme canonique et en divisant par $a \neq 0$, on obtient :

$ax^2 + bx + c = 0$ si, et seulement si, $a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = \dfrac{\Delta}{4a}$.

Si $\Delta < 0$, cette équation est impossible.
Si $\Delta = 0$, elle admet une unique solution.
Si $\Delta > 0$, elle admet deux solutions.

Remarques :

- Vocabulaire : les éventuelles solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ sont aussi appelées les **racines** du trinôme $ax^2 + bx + c$.
- Lorsque $\Delta = 0$, l'unique solution est l'abscisse du sommet de la parabole représentant la fonction $x \longmapsto ax^2 + bx + c$. Dans ce cas le sommet, dont l'ordonnée vaut 0, est situé sur l'axe des abscisses.

PROPRIÉTÉ 2 **Factorisation du trinôme $ax^2 + bx + c$**

- **Lorsque** $\Delta = 0$, en notant x_0 l'unique racine, on a : $ax^2 + bx + c = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = a(x - x_0)^2$.
- **Lorsque** $\Delta > 0$, en notant x_1 et x_2 les deux racines, on a : $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.
- **Lorsque** $\Delta < 0$, le trinôme $ax^2 + bx + c$ ne se factorise pas.

Démonstration : *Voir la démonstration à l'exercice 67, page 38.*

Exemple :

Résolution de l'équation $3x^2 - 8x + 5 = 0$ et factorisation de $3x^2 - 8x + 5$.

- On calcule le discriminant : $\Delta = (-8)^2 - 4 \times 3 \times 5 = 4$.

  Comme $\Delta > 0$, il y a deux solutions : $\dfrac{-(-8)-\sqrt{4}}{2 \times 3} = \dfrac{8-2}{6} = 1$ et $\dfrac{-(-8)+\sqrt{4}}{2 \times 3} = \dfrac{8+2}{6} = \dfrac{5}{3}$.

  Ainsi l'ensemble des solutions est $S = \left\{1\ ,\ \dfrac{5}{3}\right\}$.

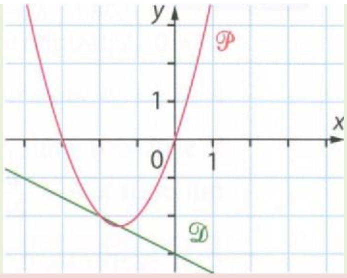
- En appliquant la propriété 2, on a, pour tout réel x : $3x^2 - 8x + 5 = 3(x-1)\left(x - \dfrac{5}{3}\right) = (x-1)(3x-5)$.

Exercice corrigé : ***résoudre une équation du second degré***

Dans un repère du plan, on a tracé la parabole $\mathscr{P}$ représentant la fonction $f : x \longmapsto x^2 + 3x$ et la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = -0{,}5x - 3$.

1) Montrer que $\mathscr{D}$ et $\mathscr{P}$ ont deux points communs et déterminer les coordonnées de ces deux points.

2) $\mathscr{P}$ semble couper l'axe des abscisses en deux points. Préciser ces points.



Solution :

- La droite $\mathscr{D}$ est la représentation graphique de la fonction affine $g : x \longmapsto -0{,}5x - 3$; on s'intéresse donc à l'équation $f(x) = g(x)$:

  $f(x) = g(x)$ équivaut à $x^2 + 3x = -0{,}5x - 3$, ainsi qu'à $x^2 + 3{,}5x + 3 = 0$.

  On calcule le discriminant du trinôme $x^2 + 3{,}5x + 3$:

  $\Delta = 3{,}5^2 - 4 \times 1 \times 3 = 0{,}25$.

  Comme $\Delta > 0$, cette équation a deux solutions qui sont :

  $\dfrac{-3{,}5-\sqrt{0{,}25}}{2 \times 1} = \dfrac{-3{,}5-0{,}5}{2} = -2$ et $\dfrac{-3{,}5+\sqrt{0{,}25}}{2 \times 1} = \dfrac{-3{,}5+0{,}5}{2} = -1{,}5$.

  Donc $\mathscr{P}$ et $\mathscr{D}$ ont deux points communs, d'abscisses -2 et $-1{,}5$.

  Les ordonnées de ces deux points sont alors :

  $g(-2) = -0{,}5 \times (-2) - 3 = -2$ et $g(-1{,}5) = -0{,}5 \times (-1{,}5) - 3 = -2{,}25$.

  Ainsi, $\mathscr{P}$ et $\mathscr{D}$ se coupent aux points de coordonnées $(-2\ ;-2)$ et $(-1{,}5\ ;-2{,}25)$.

- On résout l'équation $f(x) = 0$:

  $f(x) = 0$ équivaut à : $x^2 + 3x = 0$, ainsi qu'à : $x(x+3) = 0$, soit aussi à : $x = 0$ ou $x = -3$.

  Donc $\mathscr{P}$ coupe l'axe des abscisses aux points $A(-3\ ;0)$ et $O(0\ ;0)$.

Méthode :

Les abscisses des points communs aux courbes représentatives de deux fonctions f et g sont les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$.

Lorsque $\Delta > 0$ le trinôme $ax^2 + bx + c$ admet deux racines.

L'ordonnée d'un point de la courbe représentant une fonction est l'image de son abscisse par cette fonction.

L'axe des abscisses a pour équation $y = 0$; il représente la fonction constante $x \longmapsto 0$.

Lorsque $c = 0$, le trinôme se factorise par x : on n'a pas besoin d'utiliser les formules.

Exercice n°7 page 25

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$:

a) $2x^2 + x - 10 = 0$; **b)** $1{,}2x^2 + 0{,}4x + 2{,}3 = 0$; **c)** $-x^2 + 7x - 6 = 0$; **d)** $\dfrac{-1}{2}x^2 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{8} = 0$.

Dans tout l'exercice, on note S l'ensemble des solutions.

a) Pour $2x^2 + x - 10 = 0$, on a : $\Delta = 1^2 - 4 \times 2(-10) = 81$.

L'équation a deux solutions : $\dfrac{-1-\sqrt{81}}{2 \times 2} = \dfrac{-10}{4} = \dfrac{-5}{2}$ et $\dfrac{-1+\sqrt{81}}{2 \times 2} = \dfrac{8}{4} = 2$.

Donc $S = \boxed{\left\{\dfrac{-5}{2}\ ,\ 2\right\}}$.

b) Pour $1{,}2x^2 + 0{,}4x + 2{,}3 = 0$, on a : $\Delta = 0{,}4^2 - 4 \times 1{,}2 \times 2{,}3 = -10{,}88$.

L'équation n'a pas de solution, donc $S = \boxed{\varnothing}$.

c) Pour $-x^2 + 7x - 6 = 0$, on a : $\Delta = 7^2 - 4(-1)(-6) = 25$.

L'équation a deux solutions : $\dfrac{-7-\sqrt{25}}{2(-1)} = 6$ et $\dfrac{-7+\sqrt{25}}{2(-1)} = 1$.

Donc $S = \boxed{\{1\ ,\ 6\}}$.

d) Pour $\frac{-1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8} = 0$, on a : $\Delta = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \times \frac{-1}{2} \times \frac{-1}{8} = 0$.

L'équation a une solution unique : $\dfrac{\frac{-1}{2}}{2 \times \frac{-1}{2}} = \frac{1}{2}$.

Donc S = $\boxed{\left\{\frac{1}{2}\right\}}$.

Exercice n°8 page 25

Donner, lorsque c'est possible, une factorisation des trinômes de l'exercice *7* :

a) $2x^2 + x - 10 = 0$; **b)** $1{,}2x^2 + 0{,}4x + 2{,}3 = 0$; **c)** $-x^2 + 7x - 6 = 0$; **d)** $\frac{-1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8} = 0$.

a) Le polynôme $2x^2 + x - 10$ a deux racines : $\frac{-5}{2}$ et 2.

Donc $2x^2 + x - 10 = 2\left(x + \frac{5}{2}\right)(x - 2) = \boxed{2(x + 2{,}5)(x - 2)}$.

b) Le polynôme $1{,}2x^2 + 0{,}4x + 2{,}3$ n' a pas de racine, donc il n'y a $\boxed{\text{pas de factorisation}}$.

c) Le polynôme $-x^2 + 7x - 6$ a deux racines : 1 et 6.

Donc $-x^2 + 7x - 6 = \boxed{-(x - 1)(x - 6)}$.

d) Le polynôme $\frac{-1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}$ a une racine unique : $\frac{1}{2}$.

Donc $\frac{-1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8} = \boxed{\frac{-1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}$.

Exercice n°9 page 25

Résoudre les équations suivantes dans IR sans utiliser les formules de la propriété **1.** :

a) $5x^2 - 9x = 0$; **b)** $x^2 - 4x + 4 = 0$; **c)** $-x^2 + 11 = 0$; **d)** $4x^2 - 4x + 1 = 0$.

Dans tout l'exercice, on note S l'ensemble des solutions.

a) $5x^2 - 9x = 0$ équivaut à : $x(5x - 9) = 0$.

S = $\boxed{\left\{0\,,\frac{9}{5}\right\}}$.

b) $x^2 - 4x + 4 = 0$ équivaut à : $(x - 2)^2 = 0$.

S = $\boxed{\{2\}}$.

c) $-x^2 + 11 = 0$ équivaut à : $x^2 = 11$.

S = $\boxed{\{-\sqrt{11}\,, \sqrt{11}\}}$.

d) $4x^2 - 4x + 1 = 0$ équivaut à : $(2x - 1)^2 = 0$.

S = $\boxed{\{0{,}5\}}$.

Exercice n°10 page 25

Déterminer, si elles existent, les coordonnées des points d'intersection de la parabole $\mathscr{P}$ représentant la fonction f avec la droite $\mathscr{D}$ dans les cas suivants :

a) $f : x \longmapsto 5x^2 - 3x + 2$ et $\mathscr{D} : y = -3x + 7$.

b) $f : x \longmapsto -x^2 + x + 1$ et $\mathscr{D} : y = 3x - 7$.

c) $f : x \longmapsto 3x^2 + x + 2$ et $\mathscr{D} : y = 2$.

d) $f : x \longmapsto -3x^2 + 7x + 12$ et $\mathscr{D} : y = 5x + 14$.

e) $f : x \longmapsto 0{,}5x^2 - 3{,}2x + 2{,}8$ et $\mathscr{D} : x = 4$.

a) $5x^2 - 3x + 2 = -3x + 7$ équivaut aux équations suivantes :

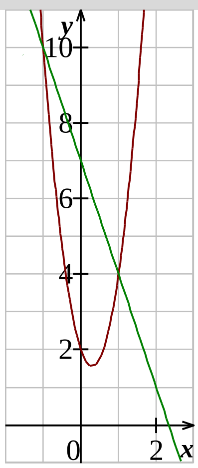
$5x^2 - 5 = 0$

$x^2 = 1$

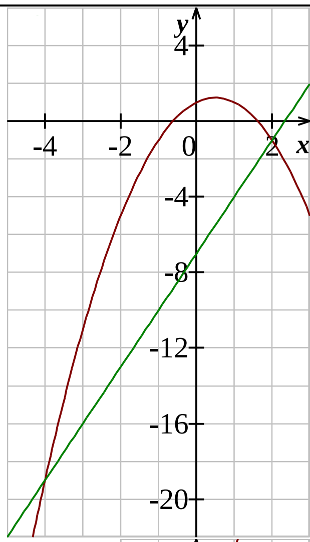
$x = 1$ ou $x = -1$.

De plus $-3 \times 1 + 7 = 4$ et $-3(-1) + 7 = 10$.

La parabole $\mathscr{P}$ et la droite $\mathscr{D}$ sont sécantes en A$\boxed{(1\,,4)}$ et en B$\boxed{(-1\,,10)}$.

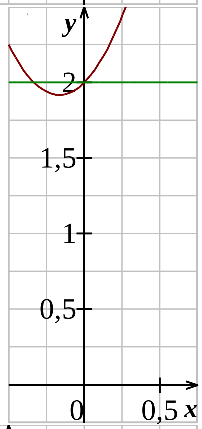


b) $-x^2 + x + 1 = 3x - 7$ équivaut à :
$x^2 + 2x - 8 = 0$.
On a alors : $\Delta = 4 + 32 = 36$,
d'où il y a deux solutions : $\dfrac{-2-6}{2} = -4$ et $\dfrac{-2+6}{2} = 2$.
De plus $3(-4) - 7 = -19$ et $3 \times 2 - 7 = -1$.
La parabole $\mathscr{P}$ et la droite $\mathscr{D}$ sont sécantes en A$\boxed{(2\,,-1)}$ et en B$\boxed{(-4\,,-19)}$.

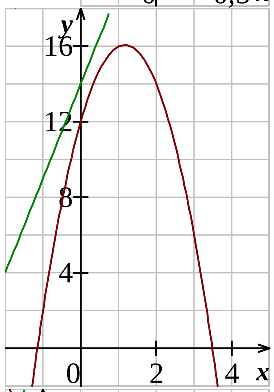


c) $3x^2 + x + 2 = 2$ équivaut aux équations :
$3x^2 + x = 0$
$x(3x + 1) = 0$
$x = 0$ ou $x = \dfrac{-1}{3}$.

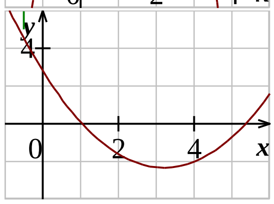
La parabole $\mathscr{P}$ et la droite $\mathscr{D}$ sont sécantes en A$\boxed{(0\,,2)}$ et en B$\boxed{\left(\dfrac{-1}{3}\,,2\right)}$.



d) $-3x^2 + 7x + 12 = 5x + 14$ équivaut à : $-3x^2 + 2x - 2 = 0$.
$\Delta = -20$.
La parabole $\mathscr{P}$ et la droite $\mathscr{D}$ n'ont $\boxed{\text{pas de points}}$ d'intersection.



e) $0{,}5 \times 4^2 - 3{,}2 \times 4 + 2{,}8 = 8 - 12{,}8 + 2{,}8 = -2$.
La parabole $\mathscr{P}$ et la droite $\mathscr{D}$ sont sécantes en A$\boxed{(4\,,-2)}$.



Exercice n°11 page 25

Soit $f : x \longmapsto -x^2 + x + 1$. À l'aide de la calculatrice, donner des valeurs approchées à 0,01 près des solutions de l'équation $f(x) = 0$.
Calculer les valeurs exactes de ces solutions.

- En observant la parabole sur la calculatrice, on constate $f(x) = 0$ a deux solutions x_1 et x_2 telles que $-1 < x_1 < 0$ et $1 < x_2 < 2$. On affine la précision à l'aide de tableaux de valeurs :

x	-1	0	$-0{,}7$	$-0{,}6$	$-0{,}62$	$-0{,}61$	$-0{,}615$
$f(x)$	-1	1	$-0{,}19$	$0{,}04$	$-0{,}0044$	$0{,}0179$	$0{,}006775$

On en déduit que $-0{,}62 < x_1 < -0{,}615$, et donc $x_1 \approx \boxed{-0{,}62}$.

x	1	2	$1{,}6$	$1{,}7$	$1{,}61$	$1{,}62$	$1{,}615$
$f(x)$	1	-1	$0{,}04$	$-0{,}19$	$0{,}0179$	$-0{,}0044$	$0{,}006775$

On en déduit que $-1{,}615 < x_2 < -0{,}62$, et donc $x_2 \approx \boxed{1{,}62}$.

- Pour $-x^2 + x + 1 = 0$, on a $\Delta = 1^2 - 4(-1) \times 1 = 1 + 4 = 5$.

  Il y a deux solutions : $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{-2} = \boxed{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$ et $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{-2} = \boxed{\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}}$.

Exercice résolu n°14 page 28 *Factoriser un trinôme pour résoudre une équation*

1) Factoriser les trinômes : **a)** $2x^2 + 3x - 2$; **b)** $2x^2 - 9x + 4$.

1) **a)** $2x^2 + 3x - 2$ a pour discriminant $\Delta = 3^2 - 4 \times 2 \times (-2) = 25$.

Ce trinôme a deux racines $\dfrac{3-5}{2\times 2} = -2$ et $\dfrac{3+5}{2\times 2} = 0{,}5$.

On a donc $2x^2 + 3x - 2 = 2[(x-(-2)](x - 0{,}5) = \boxed{(x+2)(2x-1)}$.

b) $2x^2 - 9x + 4$ a pour discriminant $\Delta = (-9)^2 - 4 \times 2 \times 4 = 49$.

Ce trinôme a deux racines :

$\dfrac{-(-9)-\sqrt{49}}{2\times 2} = \dfrac{9-7}{4} = 0{,}5$ et $\dfrac{-(-9)+\sqrt{49}}{2\times 2} = \dfrac{9+7}{4} = 4$.

On a donc $2x^2 - 9x + 4 = 2(x - 0{,}5)(x-4) = \boxed{(2x-1)(x-4)}$.

Pour factoriser un trinôme, on utilise le discriminant pour trouver les racines éventuelles x_1 et x_2.
Quand ces racines existent, on a $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.
On peut « faire entrer » le facteur a dans une des deux parenthèses.

2) Résoudre dans ℝ l'équation (E) : $\dfrac{1}{2x^2+3x-2} + \dfrac{x}{2x^2-9x+4} = 0$.

2) L'équation (E) s'écrit $\dfrac{1}{(x+2)(2x-1)} + \dfrac{x}{(2x-1)(x-4)} = 0$.

(E) a pour valeurs interdites -2, $0{,}5$ et 4. Sous cette condition, (E) équivaut à :

$\dfrac{1(x-4) + x(x+2)}{(x+2)(2x-1)(x-4)} = 0$

$\dfrac{x^2+3x-4}{(x+2)(2x-1)(x-4)} = 0$

$x^2 + 3x - 4 = 0$.

$x^2 + 3x - 4$ a pour discriminant $\Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 25$.

Il a donc deux racines $\dfrac{-3-\sqrt{25}}{2\times 1} = \dfrac{-3-5}{2} = -4$ et $\dfrac{-3+\sqrt{25}}{2\times 1} = \dfrac{-3+5}{2} = 1$.

L'ensemble des solutions de l'équation (E) est $\boxed{\{1 , -4\}}$.

La factorisation permet de trouver le dénominateur commun le plus simple et les valeurs interdites.
On obtient après réduction au même dénominateur un numérateur qui est un trinôme.
Vérifier que les valeurs trouvées ne sont pas des valeurs interdites.

Exercice n°5 page 44 Résoudre une équation du second degré

→ Voir le **savoir-faire**, page 25.

1) Résoudre dans ℝ, sans utiliser le discriminant Δ : **a)** $17x^2 - 8x = 0$; **b)** $9x^2 - 6x + 1 = 0$.

2) Résoudre dans ℝ les équations suivantes : **a)** $5x^2 + 11x - 16 = 0$; **b)** $4x^2 + x - 9 = 0$.

Méthode :

❶ On utilise une factorisation (x peut être facteur commun) ou on repère une identité remarquable.

❷ On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ et on conclut selon le signe de Δ en utilisant les formules du cours.

Dans tout l'exercice, on note S l'ensemble des solutions.

1) **a)** $17x^2 - 8x = 0$ équivaut à :

$x(17x - 8) = 0$

$x = 0$ ou $17x - 8 = 0$.

$x = 0$ ou $x = \dfrac{8}{17}$.

L'ensemble des solutions est : $S = \boxed{\left\{0 , \dfrac{8}{17}\right\}}$.

b) $9x^2 - 6x + 1 = 0$ équivaut à :

$(3x-1)^2 = 0$

$3x - 1 = 0$

$x = \dfrac{1}{3}$.

L'ensemble de solution est : $S = \boxed{\left\{\dfrac{1}{3}\right\}}$.

2) **a)** $5x^2 + 11x - 16 = 0$.

$\Delta = 11^2 - 4 \times 5\ (-16) = 121 + 320 = 441$.

Comme $\Delta > 0$, alors l'équation a deux solutions : $\dfrac{-11-\sqrt{441}}{2\times 5} = \dfrac{-11-21}{10} = -3{,}2$ et $\dfrac{-11+\sqrt{441}}{2\times 5} = \dfrac{-11+21}{10} = 1$.

L'ensemble des solutions est : S = $\boxed{\{1\ ,\ -3{,}2\}}$.

b) $4x^2 + x - 9 = 0$.
$\Delta = 1^2 - 4 \times 4\,(-9) = 1 + 144 = -143$.
Comme $\Delta < 0$, alors l'équation n'a pas de solution.
L'ensemble de solution est : S = $\boxed{\varnothing}$.

Exercice n°6 page 44 Factoriser un trinôme du second degré

→ Voir le **savoir-faire**, page 25.
Écrire, lorsque c'est possible, $f(x)$ comme produit de deux facteurs du premier degré :
a) $f(x) = 2x^2 - 7x - 4$; **b)** $f(x) = -x^2 + x - 1$; **c)** $f(x) = -3x^2 + 7x + 6$; **d)** $f(x) = 4x^2 - 20x + 25$.

Méthode :
On résout l'équation $f(x) = 0$:
- si elle admet deux solutions x_1 et x_2 , alors $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$;
- si elle admet une solution x_0 , alors $f(x) = a(x - x_0)^2$;
- si elle n'admet pas de solution la factorisation n'est pas possible.

a) $f(x) = 2x^2 - 7x - 4$.
$\Delta = (-7)^2 - 4 \times 2\,(-4) = 49 + 32 = 81$.
Comme $\Delta > 0$, alors l'équation a deux solutions : $\dfrac{7-\sqrt{81}}{2\times 2} = \dfrac{-2}{4} = \dfrac{-1}{2}$ et $\dfrac{7+\sqrt{81}}{2\times 2} = \dfrac{16}{4} = 4$.
Donc $f(x) = 2\left(x - \dfrac{-1}{2}\right)(x-4) = \boxed{(2x+1)(x-4)}$.

b) $f(x) = -x^2 + x - 1$
$\Delta = 1^2 - 4(-1)(-1) = 1 - 4 = -3$.
Comme $\Delta < 0$, alors $f(x)$ ne $\boxed{\text{peut pas}}$ être factorisée.

c) $f(x) = -3x^2 + 7x + 6$
$\Delta = 7^2 - 4 \times (-3) \times 6 = 49 + 72 = 121$.
Comme $\Delta > 0$, alors l'équation a deux solutions : $\dfrac{-7-\sqrt{121}}{2(-3)} = \dfrac{-7-11}{-6} = 3$ et $\dfrac{-7+\sqrt{121}}{2(-3)} = \dfrac{-7+11}{-6} = \dfrac{-2}{3}$.
Donc $f(x) = -3\left(x - \dfrac{-2}{3}\right)(x-3) = \boxed{(-3x-2)(x-3)}$.

d) $f(x) = 4x^2 - 20x + 25 = (2x)^2 - 2(2x) \times 5 + 5^2 = \boxed{(2x-5)^2}$.

Exercice n°43 page 35 *Vrai ou faux ?*

On résout les équations dans $\mathbb{R}$. Préciser si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.
1) L'équation $2x^2 - 5x + 3 = 0$ a deux solutions.
2) L'équation $-x^2 + 15x - 13 = 0$ n'a qu'une solution.
3) L'équation $7x^2 - 8x + 4 = 0$ a deux solutions.
4) L'équation $-3x^2 - x + 1 = 0$ n'a pas de solution.
5) L'équation $x^2 - 5x = 0$ a deux solutions.

1) $\Delta = 25 - 24 = 1$, donc l'affirmation est $\boxed{\text{vraie}}$.
2) $\Delta = 225 - 52 = 173$, donc l'affirmation est $\boxed{\text{fausse}}$.
3) $\Delta = 64 - 112 = -48$, donc l'affirmation est $\boxed{\text{fausse}}$.
4) $\Delta = 1 + 12 = 13$, donc l'affirmation est $\boxed{\text{fausse}}$.
5) $\Delta = 25 - 0 = 25$, donc l'affirmation est $\boxed{\text{vraie}}$.

Exercice n°44 page 35 *QCM*

Déterminer **l'unique** bonne réponse.
1) Pour tout réel x, $-2x^2 + 2x + 12$ est égal à :
a) $(x+2)(x-3)$; **b)** $-2(x+2)(x-3)$; **c)** $2(x+2)(x-3)$.
2) Pour tout réel x, $3x^2 + 6x + 3$ est égal à :
a) $3(x+1)^2$; **b)** $3(x+1)(x-1)$; **c)** $(3x+3)(3x-3)$.
3) Pour tout réel x, $2x^2 + x - 1$ est égal à :
a) $(2x-1)(x+1)$; **b)** $2(x-1)(x+1)$; **c)** $(2x-1)(2x+2)$.

1) En développant les réponses proposées, seule celle de la b donne le terme $-2x^2$.
Réponse $\boxed{\text{b}}$.

2) $3x^2 + 6x + 3 = 3(x^2 + 2x + 1) = 3(x + 1)^2$.

Réponse $\boxed{\text{a}}$.

3) En développant les réponses proposées, seule celle de la a donne le terme -2.

Réponse $\boxed{\text{a}}$.

Exercice n°45 page 36

f est une fonction polynôme du second degré. Préciser, dans chaque cas, le nombre de solutions dans ℝ de l'équation $f(x) = 0$.

1)

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$		↗	3	↘	

2)

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)$		↗	-5	↘	

3)

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$		↘	-2	↗	

4)

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$		↘	0	↗	

1) $\boxed{\text{Deux}}$ solutions.

2) $\boxed{\text{Aucune}}$ solution.

3) $\boxed{\text{Deux}}$ solutions.

4) $\boxed{\text{Une}}$ solution.

Exercice n°49 page 36

Résoudre les équations suivantes dans ℝ sans utiliser le discriminant :

a) $3x^2 + 7x = 0$; **b)** $5x^2 + 2{,}7 = 0$; **c)** $-2x^2 + 0{,}5 = 0$; **d)** $-x^2 + x - 8 = -8$.

Dans tout l'exercice, on note S l'ensemble des solutions.

a) $3x^2 + 7x = 0$ équivaut à : $x(3x + 7) = 0$; S = $\boxed{\left\{0\,,\,\frac{-7}{3}\right\}}$.

b) $5x^2 + 2{,}7 = 0$ équivaut à : $x^2 = -0{,}54$; S = $\boxed{\varnothing}$.

c) $-2x^2 + 0{,}5 = 0$ équivaut à : $x^2 = 0{,}25$; S = $\boxed{\{0{,}5\,,\,-0{,}5\}}$.

d) $-x^2 + x - 8 = -8$ équivaut à : $x(-x + 1) = 0$; S = $\boxed{\{0\,,\,1\}}$.

Exercice n°50 page 36

Résoudre les équations suivantes dans ℝ en utilisant la méthode la plus pertinente :

a) $x^2 - 8x = 9$; **c)** $(2x + 5)^2 = 1$; **e)** $2x^2 - x - 1 = 0$;

b) $x^2 - 6x + 9 = 0$; **d)** $5x^2 - 2\sqrt{5}\,x + 1 = 0$; **f)** $x^2 + 3x = 0$.

Dans tout l'exercice, on note S l'ensemble des solutions.

a) $x^2 - 8x = 9$ équivaut à : $x^2 - 8x - 9 = 0$;
on a alors : $\Delta = (-8)^2 - 4 \times 1 \times (-9) = 100$,
d'où il y a deux solutions :
$\frac{8 - \sqrt{100}}{2 \times 1} = -1$ et $\frac{8 + \sqrt{100}}{2 \times 1} = 9$.

Donc S = $\boxed{\{9\,,\,-1\}}$.

b) $x^2 - 6x + 9 = 0$ équivaut aux équations suivantes :
$(x - 3)^2 = 0$
$x - 3 = 0$
$x = 3$.

Donc S = $\boxed{\{3\}}$.

c) $(2x + 5)^2 = 1$ équivaut aux équations suivantes :
$(2x + 5)^2 - 1^2 = 0$
$((2x + 5) - 1)((2x + 5) + 1) = 0$
$(2x + 4)(2x + 6) = 0$
$2x + 4 = 0$ ou $2x + 6 = 0$
$x = -2$ ou $x = -3$.

Donc S = $\boxed{\{-2\,,\,-3\}}$.

d) $5x^2 - 2\sqrt{5}\,x + 1 = 0$ équivaut aux équations suivantes :
$(\sqrt{5}x)^2 - 2 \times \sqrt{5}\,x \times 1 + 1^2 = 0$
$(\sqrt{5}\,x - 1)^2 = 0$
$\sqrt{5}\,x - 1 = 0$
$x = \frac{1}{\sqrt{5}}$
$x = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Donc S = $\boxed{\left\{\frac{\sqrt{5}}{5}\right\}}$.

e) Pour $2x^2 - x - 1 = 0$, on a :
$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 2(-1) = 9$,
d'où il y a deux solutions : $\frac{1 - \sqrt{9}}{2 \times 2} = \frac{-1}{2}$ et $\frac{1 + \sqrt{9}}{2 \times 2} = 1$.

Donc S = $\boxed{\left\{\frac{-1}{2}\,,\,1\right\}}$.

f) $x^2 + 3x = 0$ équivaut aux équations suivantes :
$x(x + 3) = 0$
$x = 0$ ou $x + 3 = 0$

$x = 0$ ou $x = -3$.

Donc $\mathcal{S} = \boxed{\{0\,,-3\}}$.

Exercice n°51 page 36

Factoriser si possible les expressions suivantes :

a) $x^2 + x - 12$; **b)** $3x^2 - x + 1$; **c)** $-2x^2 + 7x - 5$; **d)** $10x^2 + 6x + 0{,}9$.

a) Pour $x^2 + x - 12$, on a :
$\Delta = 1^2 - 4 \times 1(-12) = 49$,
d'où il y a deux racines :
$\dfrac{-1-\sqrt{49}}{2\times 1} = -4$ et $\dfrac{-1+\sqrt{49}}{2\times 1} = 3$.
Donc $x^2 + x - 12 = \boxed{(x+4)(x-3)}$.

b) Pour $3x^2 - x + 1$, on a :
$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 3 \times 1 = -11$,
d'où il n'y a pas de racine,
et donc on ne peut $\boxed{\text{pas factoriser}}$.

c) Pour $-2x^2 + 7x - 5$, on a :
$\Delta = 7^2 - 4(-2)(-5) = 9$,
d'où il y a deux racines : $\dfrac{-7-\sqrt{9}}{2(-2)} = \dfrac{5}{2}$ et $\dfrac{-7+\sqrt{9}}{2(-2)} = 1$.
Donc $-2x^2 + 7x - 5 = -2\left(x - \dfrac{5}{2}\right)(x-1) = \boxed{(5-2x)(x-1)}$.

d) Pour $10x^2 + 6x + 0{,}9$, on a :
$\Delta = 6^2 - 4 \times 10 \times 0{,}9 = 0$,
d'où il y a une seule racine : $\dfrac{-6}{2\times 10} = -0{,}3$.
Donc $10x^2 + 6x + 0{,}9 = \boxed{10(x+0{,}3)^2}$.

Exercice n°52 page 36

Déterminer les racines des trinômes suivants et en déduire une factorisation :

a) $\mathrm{P}(x) = x^2 - 4x + 3$; **c)** $\mathrm{P}(x) = 3x^2 + 1 + 4x$; **e)** $\mathrm{P}(x) = 5x^2 + 30x + 45$;
b) $\mathrm{P}(x) = x^2 - 2x + 1$; **d)** $\mathrm{P}(x) = -6x^2 + x + 2$; **f)** $\mathrm{P}(x) = x^2 - 5x - 6$.

a) Pour $\mathrm{P}(x) = x^2 - 4x + 3$, on a :
$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 4$,
d'où il y a deux racines : $\dfrac{4-\sqrt{4}}{2} = \boxed{1}$ et $\dfrac{4+\sqrt{4}}{2} = \boxed{3}$.
Donc $\mathrm{P}(x) = \boxed{(x-1)(x-3)}$.

b) Pour $\mathrm{P}(x) = x^2 - 2x + 1$, on a :
$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 0$,
d'où il y a une seule racine : $\dfrac{2}{2} = \boxed{1}$.
Donc $\mathrm{P}(x) = \boxed{(x-1)^2}$.

c) Pour $\mathrm{P}(x) = 3x^2 + 1 + 4x = 3x^2 + 4x + 1$, on a :
$\Delta = 1^2 - 4 \times 3 \times 1 = 4$,
d'où il y a deux racines : $\dfrac{-4-\sqrt{4}}{2\times 3} = \boxed{-1}$ et $\dfrac{-4+\sqrt{4}}{2\times 3} = \boxed{\dfrac{-1}{3}}$.
Donc $\mathrm{P}(x) = 3(x+1)\left(x + \dfrac{1}{3}\right) = \boxed{(x+1)(3x+1)}$.

d) Pour $\mathrm{P}(x) = -6x^2 + x + 2$, on a :
$\Delta = 1^2 - 4 \times (-6) \times 2 = 49$,
d'où il y a deux racines : $\dfrac{-1-\sqrt{49}}{2(-6)} = \boxed{\dfrac{2}{3}}$ et $\dfrac{-1+\sqrt{49}}{2(-6)} = \boxed{\dfrac{-1}{2}}$.
Donc $\mathrm{P}(x) = -6\left(x - \dfrac{2}{3}\right)\left(x + \dfrac{1}{2}\right) = -3\left(x - \dfrac{2}{3}\right) \times 2\left(x + \dfrac{1}{2}\right) = \boxed{(2-3x)(2x+1)}$.

e) Pour $\mathrm{P}(x) = 5x^2 + 30x + 45$, on a :
$\Delta = 30^2 - 4 \times 5 \times 45 = 0$,
d'où il y une seule racine : $\dfrac{-30}{2\times 5} = \boxed{-3}$.
Donc $\mathrm{P}(x) = \boxed{5(x+3)^2}$.

f) Pour $\mathrm{P}(x) = x^2 - 5x - 6$, on a :
$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1(-6) = 49$,
d'où il y a deux racines : $\dfrac{5-\sqrt{49}}{2\times 1} = \boxed{-1}$ et $\dfrac{5+\sqrt{49}}{2\times 1} = \boxed{6}$.
Donc $\mathrm{P}(x) = \boxed{5(x-6)(x+1)}$.

Exercice n°53 page 36

Factoriser si possible les expressions suivantes :

a) $3x^2 - 5x$; **b)** $4x^2 - 81$; **c)** $-2x^2 - 3$; **d)** $11x^2 + 1{,}5$.

a) $3x^2 - 5x = \boxed{x(3x-5)}$.

b) $4x^2 - 81 = \boxed{(2x-9)(2x+9)}$.

c) $-2x^2 - 3$ ne se factorise pas.

d) $11x^2 + 1{,}5$ ne se factorise pas.

Exercice n°54 page 36

On donne le tableau de variations d'une fonction polynôme de degré 2.
Proposer, si possible, une valeur remplaçant les pointillés pour que l'équation $f(x) = 0$ ait dans $\mathbb{R}$:

a) deux solutions ; **b)** une solution unique ; **c)** aucune solution.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	↘	…	↗

On peut mettre une valeur a avec :

a) a strictement négatif.

b) $a = \boxed{0}$.

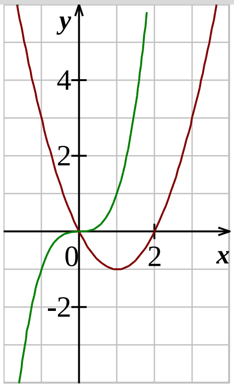
c) a strictement positif.

Exercice n°57 page 37

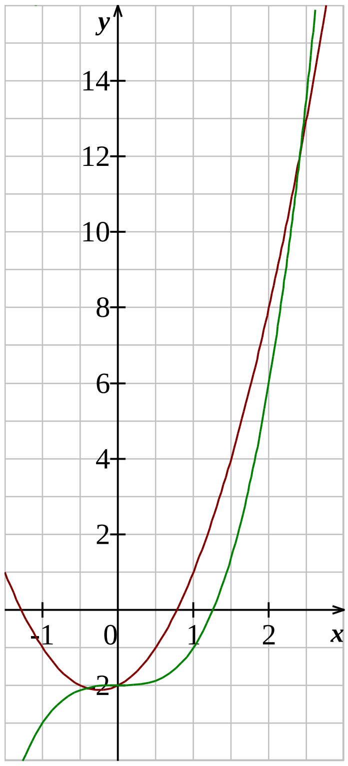
Conjecturer à l'aide de la calculatrice le nombre de points communs aux courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère du plan. Déterminer, en résolvant une équation, les coordonnées de ces points.

1) $f : x \longmapsto x^2 - 2x$ et $g : x \longmapsto x^3$. **2)** $f : x \longmapsto 2x^2 + x - 2$ et $g : x \longmapsto x^3 - 2$.

Conseil : Penser à factoriser.



1)
- On conjecture graphiquement qu'il y a un point commun.
- $f(x) = g(x)$ équivaut aux équations suivantes :
  $x^2 - 2x = x^3$
  $x^3 - x^2 + 2x = 0$
  $x(x^2 - x + 2) = 0$.
  Pour $x^2 - x + 2$, on a $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 2 = -7$, donc $x^2 - x + 2$ n'est jamais nul.
  La seule solution à $f(x) = g(x)$ est 0.
  De plus $f(0) = g(0) = 0$.
  Donc les courbes représentatives des fonctions f et g n'ont que le point $\mathrm{O}\boxed{(0\,,0)}$ en commun.



2)
- On conjecture graphiquement qu'il y a trois points communs.
- $f(x) = g(x)$ équivaut aux équations suivantes :
  $2x^2 + x - 2 = x^3 - 2$
  $x^3 - 2x^2 - x = 0$
  $x(x^2 - 2x - 1) = 0$
  $x = 0$ ou $x^2 - 2x - 1 = 0$.
  Pour $x^2 - 2x - 1$, on a $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1(-1) = 8$,
  donc $x^2 - 2x - 1$ a deux racines : $\dfrac{2-\sqrt{8}}{2\times 1} = \dfrac{2-2\sqrt{2}}{2} = 1-\sqrt{2}$ et $1+\sqrt{2}$.
  De plus $g(0) = -2$; $g\left(1-\sqrt{2}\right) = 5 - 5\sqrt{2}$ et $g\left(1+\sqrt{2}\right) = 5 + \sqrt{2}$.
  Donc les courbes représentatives des fonctions f et g sont sécantes en
  $\mathrm{A}\boxed{(0\,,-2)}$, en $\mathrm{B}\boxed{\left(1-\sqrt{2}\,,5-5\sqrt{2}\right)}$ et en $\mathrm{C}\boxed{\left(1+\sqrt{2}\,,5+5\sqrt{2}\right)}$.

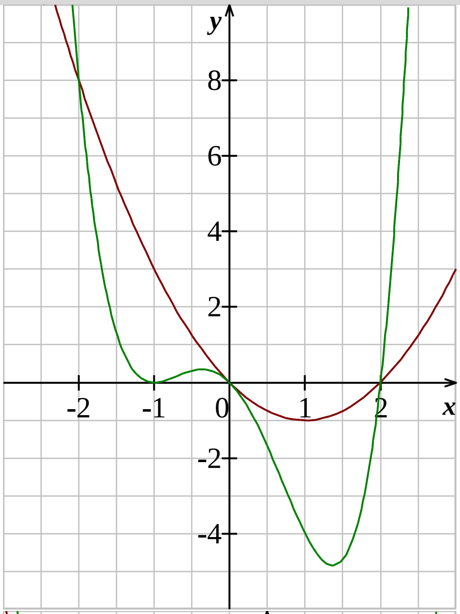
Exercice n°58 page 37

Conjecturer à l'aide de la calculatrice le nombre de points communs aux courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère du plan. Déterminer, en résolvant une équation, les coordonnées de ces points.

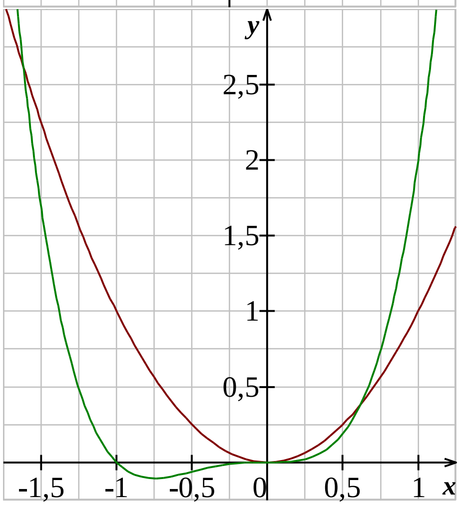
1) $f : x \longmapsto x^2 - 2x$ et $g : x \longmapsto x^4 - 3x^2 - 2x$. **2)** $f : x \longmapsto x^2$ et $g : x \longmapsto x^4 + x^3$.

1)
- On conjecture graphiquement qu'il y a $\boxed{\text{trois}}$ points communs.

  $f(x) = g(x)$ équivaut à :
  $x^2 - 2x = x^4 - 3x^2 - 2x$
  $x^4 - 4x^2 = 0$
  $x^2(x^2 - 4) = 0$
  $x^2 = 0$ ou $x^2 - 4 = 0$
  $x = 0$ ou $x = 2$ ou $x = -2$.
  De plus $f(0) = 0^2 - 2 \times 0 = 0$; $f(2) = 2^2 - 2 \times 2 = 0$;
  $f(-2) = (-2)^2 - 2(-2) = 8$.
  Donc les courbes représentatives des fonctions f et g sont sécantes en A$\boxed{(0\ ,0)}$, en B$\boxed{(2\ ,0)}$ et en C$\boxed{(-2\ ,8)}$.



2)
- On conjecture graphiquement qu'il y a $\boxed{\text{trois}}$ points communs.
- $f(x) = g(x)$ équivaut à :
  $x^2 = x^4 + x^3$
  $x^4 + x^3 - x^2 = 0$
  $x^2(x^2 + x - 1) = 0$
  $x^2 = 0$ ou $x^2 + x - 1 = 0$.
  Pour $x^2 + x - 1$, on a $\Delta = 1^2 - 4 \times 1(-1) = 5$,
  donc $x^2 + x - 1$ a deux racines : $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$.
  De plus $f(0) = 0^2 = 0$.
  $$f\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) = \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1-2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{6-2\sqrt{5}}{4} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$
  $$f\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) = \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = 3+\sqrt{5}.$$



  Donc les courbes représentatives des fonctions f et g sont sécantes en A$\boxed{(0\ ,0)}$, en B$\boxed{\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\ ,\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)}$ et en C$\boxed{\left(\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\ ,\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)}$.

Exercice n°59 page 37 *Équations bicarrées*

Les équations bicarrées sont les équations de la forme $ax^4 + bx^2 + c = 0$ avec $a \neq 0$.

Méthode : « changement de variable »

On pose $X = x^2$, et on résout l'équation : $aX^2 + bX + c = 0$ d'inconnue X.
Pour toute solution X, de celle-ci, on résout $x^2 = X$.
On en déduit les valeurs de x qui sont solutions de l'équation initiale.

Application

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $3x^4 - 5x^2 + 2 = 0$; **b)** $x^4 + 3x^2 + 2 = 0$; **c)** $-2x^4 - x^2 + 1 = 0$; **d)** $-x^4 + 2x^2 - 2 = 0$.

Dans tout l'exercice, on note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions et on pose $X = x^2$.

a) $3x^4 - 5x^2 + 2 = 0$ équivaut à : $3X^2 - 5X + 2 = 0$.

On a alors : $\Delta = 25 - 24 = 1$, donc l'équation a deux solutions : $X = \dfrac{5+1}{6} = 1$ et $X = \dfrac{5-1}{6} = \dfrac{2}{3}$.

On en déduit que $3x^4 - 5x^2 + 2 = 0$ équivaut à : $x^2 = 1$ ou $x^2 = \frac{2}{3}$.

Finalement : $\mathcal{S} = \boxed{\left\{-1\ ,\ 1\ ,\ \sqrt{\frac{2}{3}}\ ,\ -\sqrt{\frac{2}{3}}\right\}}$.

b) $x^4 + 3x^2 + 2 = 0$ équivaut à : $X^2 + 3X + 2 = 0$.

On a alors : $\Delta = 9 - 8 = 1$, il y a donc deux solutions : $X = \frac{-3+1}{2} = -1$ et $X = \frac{-3-1}{2} = -2$.

On en déduit que $x^4 + 3x^2 + 2 = 0$ équivaut à : $x^2 = -1$ ou $x^2 = -2$.

Finalement : $\mathcal{S} = \boxed{\varnothing}$.

c) $-2x^4 - x^2 + 1 = 0$ équivaut à :$-2X^2 - X + 1 = 0$.

On a alors : $\Delta = 1 + 8 = 9$, il y a donc deux solutions : $X = \frac{1+3}{-4} = -1$ et $X = \frac{1-3}{-4} = 0{,}5$.

On en déduit que $-2x^4 - x^2 + 1 = 0$ équivaut à : $x^2 = -1$ ou $x^2 = 0{,}5$.

Finalement : $\mathcal{S} = \boxed{\{\sqrt{0{,}5}\ ,\ -\sqrt{0{,}5}\}}$.

d) $-x^4 + 2x^2 - 2 = 0$ équivaut à : $-X^2 + 2X - 2 = 0$.

On a alors : $\Delta = 4 - 8 = -4$ et donc $\mathcal{S} = \boxed{\varnothing}$.

Exercice n°60 page 37

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes. On pourra, dans certains cas, s'inspirer de la méthode utilisée dans l'exercice précédent.

1) $\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} = 3$. **2)** $\frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x} = 3$. **3)** $(x^2+1)^2 - 6(x^2+1) + 5 = 0$. **4)** $\frac{7x-1}{x+2} - \frac{2x+3}{x+1} - 4 = 0$.

Dans tout l'exercice, on note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions.

1) $\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} = 3$ est définie sur $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; et pour $x \neq 0$, $\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} = 3$ équivaut à :

$\frac{1}{x^2} - \frac{2x}{x^2} - \frac{3x^2}{x^2} = 0$

$\frac{-3x^2 - 2x + 1}{x^2} = 0$

$-3x^2 - 2x + 1 = 0$.

On a $\Delta = 4 + 12 = 16$, l'équation a donc deux solutions : $\frac{2-4}{-6} = \frac{1}{3}$ et $\frac{2+4}{-6} = -1$.

Finalement : $\mathcal{S} = \boxed{\left\{-1\ ,\ \frac{1}{3}\right\}}$.

2) $\frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x} = 3$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\ ;\ 0\}$; et pour $x \neq 0$ et $x \neq -1$, $\frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x} = 3$ équivaut à :

$\frac{x^2 + (x+1)^2 - 3x(x+1)}{x(x+1)} = 0$

$\frac{x^2 + x^2 + 2x + 1 - 3x^2 - 3x}{x(x+1)} = 0$

$\frac{-x^2 - x + 1}{x(x+1)} = 0$

$-x^2 - x + 1 = 0$.

On a $\Delta = 1 + 4 = 5$, l'équation a donc deux solutions : $\frac{1-\sqrt{5}}{-2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ et $\frac{1+\sqrt{5}}{-2} = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

Finalement : $\mathcal{S} = \boxed{\left\{\frac{\sqrt{5}-1}{2}\ ,\ \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\}}$.

3) En posant $X = x^2 + 1$, on a $(x^2+1)^2 - 6(x^2+1) + 5 = 0$ équivalent à : $X^2 - 6X + 5 = 0$.

On a alors $\Delta = 36 - 20 = 16$, il y a donc deux solutions : $X = \frac{6-4}{2} = 1$ et $X = \frac{6+4}{2} = 5$.

On en déduit : $x^2 + 1 = 1$ ou $x^2 + 1 = 5$; soit $x^2 = 0$ ou $x^2 = 4$.

Finalement : $\mathcal{S} = \boxed{\{0\ ,\ 2\ ,\ -2\}}$.

4) $\dfrac{7x-1}{x+2} - \dfrac{2x+3}{x+1} - 4 = 0$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\,;-1\}$, et pour $x \neq -2$ et $x \neq -1$, $\dfrac{7x-1}{x+2} - \dfrac{2x+3}{x+1} - 4 = 0$ équivaut à :

$\dfrac{(7x-1)(x+1)-(2x+3)(x+2)-4(x+2)(x+1)}{(x+2)(x+1)} = 0$

$\dfrac{(7x^2+7x-x-1)-(2x^2+4x+3x+6)-4(x^2+x+2x+2)}{(x+2)(x+1)} = 0$

$\dfrac{7x^2+6x-1-2x^2-7x-6-4x^2-12x-8}{(x+2)(x+1)} = 0$

$\dfrac{x^2-13x-15}{(x+2)(x+1)} = 0$

$x^2-13x-15 = 0.$

On a $\Delta = 169 + 60 = 229$, il y a donc deux solutions : $\dfrac{13-\sqrt{229}}{2}$ et $\dfrac{13+\sqrt{229}}{2}$.

Finalement $\mathcal{S} = \boxed{\left\{\dfrac{13+\sqrt{229}}{2}\,,\,\dfrac{13-\sqrt{229}}{2}\right\}}$.

Exercice n°61 page 37 LOGIQUE

On considère une fonction $f : x \longmapsto ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$),
$\mathcal{P}$ sa représentation graphique dans un repère du plan et Δ le discriminant ($\Delta = b^2 - 4ac$).
Justifier les affirmations suivantes.

a) Si $\mathcal{P}$ coupe deux fois l'axe des abscisses, alors $\Delta > 0$.
b) Si $\Delta = 0$, alors le sommet de $\mathcal{P}$ est sur l'axe des abscisses.
c) Si le sommet de $\mathcal{P}$ est sur l'axe des ordonnées, alors $b = 0$.
d) Si $c = 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ possède au moins une solution.

a) Si la parabole $\mathcal{P}$ coupe deux fois l'axe des abscisses, alors l'équation $f(x) = 0$ a deux solutions et $\Delta > 0$.

b) Si $\Delta = 0$, alors l'ordonnée $\dfrac{-\Delta}{4a}$ du sommet est nulle et le sommet de $\mathcal{P}$ est sur l'axe des abscisses.

c) Si le sommet de $\mathcal{P}$ est sur l'axe des ordonnées, alors son abscisse $\dfrac{-b}{2a}$ est nulle, donc $b = 0$.

d) Si $c = 0$, alors $f(x) = ax^2 + bx$ qui s'annule au moins en 0 et l'équation $f(x) = 0$ a au moins une solution.

Exercice n°62 page 37 LOGIQUE

Énoncer les réciproques des affirmations de l'exercice précédent et préciser, en justifiant, si elles sont vraies.

a) Si $\mathcal{P}$ coupe deux fois l'axe des abscisses, alors $\Delta > 0$.
b) Si $\Delta = 0$, alors le sommet de $\mathcal{P}$ est sur l'axe des abscisses.
c) Si le sommet de $\mathcal{P}$ est sur l'axe des ordonnées, alors $b = 0$.
d) Si $c = 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ possède au moins une solution.

a) « Si $\Delta > 0$, alors $\mathcal{P}$ coupe deux fois l'axe des abscisses » est $\boxed{\text{vraie}}$, car si $\Delta > 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ a deux solutions.

b) « Si le sommet de $\mathcal{P}$ est sur l'axe des abscisses, alors $\Delta = 0$ » est $\boxed{\text{vraie}}$, car l'ordonnée nulle du sommet est $\dfrac{-\Delta}{4a}$.

c) « Si $b = 0$, alors le sommet de $\mathcal{P}$ est sur l'axe des ordonnées » est $\boxed{\text{vraie}}$, car l'abscisse $\dfrac{-b}{2a}$ du sommet est nulle.

d) « Si $f(x) = 0$ admet au moins une solution alors $c = 0$ » est $\boxed{\text{fausse}}$, car $x^2 - 5x - 6 = 0$ admet deux solutions avec $c \neq 0$.

Exercice n°63 page 37 ALGO → Voir les **Outils pour l'algorithmique**, page 8.

1) Écrire un algorithme permettant de donner le nombre de solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.
2) Programmer cet algorithme et vérifier les résultats de l'exercice **43**.

Indication : On pourra utiliser en partie l'algorithme de l'exercice **42**.

1)
```
Début
Demander les valeurs de A, de B et de C.
Si A = 0, alors afficher « Erreur ».
Calculer B² – 4AC et ranger la valeur dans D.
Si D < 0, alors afficher « Pas de solution ».
   sinon si D = 0, alors afficher « Une solution ».
      sinon afficher « Deux solutions ».
      finsi
finsi
fin
```

2) Programme sur TI :

ALGO
```
PROGRAM:DEGRE2
:Input "A=",A
:Input "B=",B
:Input "C=",C
:B² – 4AC→D
:If D>0
:Then
:Disp "PAS DE SOLUTION"
:Else
If D=0
:Then
:Disp "UNE SOLUTION"
:Else
:Disp "DEUX SOLUTIONS"
END
END
```

Exercice n°64 page 37

ALGO → Voir les **Outils pour l'algorithmique**, page 8.

1) Compléter l'algorithme précédent pour résoudre l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

2) Programmer cet algorithme et vérifier les résultats de l'exercice **48**.

1)
```
Début
Demander les valeurs de A, de B et de C.
Si A = 0, alors afficher « Erreur ».
Calculer B² – 4AC et ranger la valeur dans D.
Si D < 0, alors afficher « Pas de solution ».
   sinon si D = 0, alors
        Calculer -b/2A et ranger la valeur dans X0
        Afficher « Une solution : », X0.
     sinon
        Calculer (-b – √D)/2A et ranger la valeur dans X1
        Calculer (-b + √D)/2A et ranger la valeur dans X2
        Afficher « Deux solutions :», X1, « et », X2.
     finsi
finsi
fin
```

2) Programme sur TI :

ALGO
```
PROGRAM:DEGRE2
:Input "A=",A
:Input "B=",B
:Input "C=",C
:B² – 4AC→D
:If D>0
:Then
:Disp "PAS DE SOLUTION"
:Else
If D=0
:Then
:Disp "UNE SOLUTION",-b/(2A)
:Else
:Disp "DEUX SOLUTIONS",(-b+√(D))/(2A),(-b –√(D))/(2A)
END
END
```

Exercice n°65 page 37

ALGO → Voir les **Outils pour l'algorithmique**, page 8.

1) Modifier l'algorithme précédent pour obtenir la factorisation éventuelle de $ax^2 + bx + c$.

2) Programmer cet algorithme et vérifier les résultats de l'exercice **52**.

1)
```
Début
Demander les valeurs de A, de B et de C.
Si A = 0, alors afficher « Erreur ».
Calculer B² – 4AC et ranger la valeur dans D.
Si D < 0, alors afficher « Pas de factorisation ».
   sinon si D = 0, alors
        Calculer -b/2A et ranger la valeur dans X0
        Afficher « (x –  », X0, « )² ».
     sinon
```

```
        Calculer (-b − √D)/2A et ranger la valeur dans X1
        Calculer (-b + √D)/2A et ranger la valeur dans X2
        Afficher A, « (x -  », X1, « )(x -  », X2, « ) ».
     finsi
finsi
fin
```

2) Programme sur TI :

ALGO

```
PROGRAM:DEGRE2
:Input "A=",A
:Input "B=",B
:Input "C=",C
:B²–4AC→D
:If D>0
:Then
:Disp "PAS DE FACTORISATION"
:Else
If D=0
:Then
:Disp A,"(X+",-b/(2A),")²"
:Else
:Disp A,"(X+",(-b+√(D))/(2A),")(X+,(-b–√(D))/(2A),")"
END
END
```

Exercice n°82 page 40 Somme de carrés

Pour chaque question, on donnera toutes les solutions possibles.

1) Deux entiers relatifs consécutifs ont la somme de leurs carrés qui vaut 5 725. Déterminer ces entiers.

2) Déterminer trois entiers relatifs consécutifs dont la somme des carrés vaut 2 030.

1) Notons n le plus petit des deux entiers relatifs cherchés ; on résout :

$n^2 + (n + 1)^2 = 5\,725$ équivalent à :

$2n^2 + 2n - 5\,724 = 0$

$n^2 + n - 2\,862 = 0.$

$\Delta = 11\,449 = 107^2$, donc $n = \dfrac{-1 + 107}{2} = 53$ ou $n = \dfrac{-1 - 107}{2} = -54.$

On a donc deux solutions : $\boxed{53 \text{ et } 54}$ d'une part et $\boxed{-54 \text{ et } -53}$ d'autre part.

2) Notons n l'entier du milieu ; on résout :

$(n - 1)^2 + n^2 + (n + 1)^2 = 2\,030$ équivalent à :

$3n^2 + 2 = 2\,030$

$n^2 = 676$

$n = 26$ ou $n = -26.$

On a donc deux solutions : $\boxed{25, 26 \text{ et } 27}$ d'une part et $\boxed{-27, -26 \text{ et } -25}$ d'autre part.

Exercice n°83 page 40 Rectangles de même périmètre

1) Soit x la largeur d'un rectangle dont le périmètre vaut 25. Pour quelle valeur de x, l'aire du rectangle est-elle maximale ?
Quelle particularité possède alors le rectangle ?

2) Reprendre la question **1)** en remplaçant 25 par un réel strictement positif p quelconque.

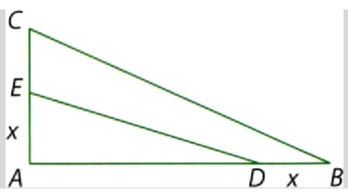
1) La longueur du rectangle est $12{,}5 - x$, donc son aire est égale à $x(12,5 - x) = -x^2 + 12{,}5x$. Ce trinôme admet un maximum pour $x = \dfrac{-12{,}5}{2(-1)} = 6{,}25.$

$12{,}5 - 6{,}25 = 6{,}25$, donc dans ce cas, le rectangle est $\boxed{\text{carré}}$.

2) La longueur du rectangle est $\dfrac{p}{2} - x$, donc son aire vaut $x\left(\dfrac{p}{2} - x\right) = -x^2 + \dfrac{p}{2}x$. Ce trinôme admet un maximum pour $x = \dfrac{\frac{-p}{2}}{2(-1)} = \dfrac{p}{4}$. Donc dans ce cas, le rectangle est $\boxed{\text{carré}}$.

Exercice n°86 page 40 Problème d'aire

ABC est un triangle rectangle en A avec AB = 9 et AC = 4.
D est un point du segment [AB] et E un point du segment [AC] tels que DB = AE = x.
Déterminer x pour que l'aire du triangle ADE soit égale à la moitié de celle du triangle ABC.



Il faut que $x \in [0 ; 4]$.

L'aire du triangle ADE est : $\dfrac{AD \times AE}{2} = \dfrac{(9-x)\times x}{2} = \dfrac{x(9-x)}{2}$.

L'aire du triangle ABC est : $\dfrac{AB \times AC}{2} = \dfrac{9 \times 4}{2} = 18$.

On résout donc l'équation $\dfrac{x(9-x)}{2} = \dfrac{1}{2} \times 18$ qui équivaut à :

$9x - x^2 = 18$

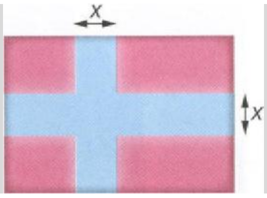
$-x^2 + 9x - 18 = 0$.

$\Delta = 9$; les solutions sont $\dfrac{-9-3}{-2}$ et $\dfrac{-9+3}{-2}$, c'est-à-dire 3 et 6.

Or $0 \leq x \leq 4$, donc $x = \boxed{3}$.

Exercice n°88 page 40 La croix du drapeau

On considère un drapeau de 3 m sur 5 m, orné d'une croix.
Quelle largeur doit-on donner à la croix pour que les parties bleue et rose aient la même aire ?



Il faut que $x \in [0 ; 3]$. L'aire de la partie bleue est $3x + 5x - x^2 = 8x - x^2$.

Elle doit être égale à la moitié de l'aire totale, c'est-à-dire : $8x - x^2 = \dfrac{15}{2}$; soit : $-x^2 + 8x - 7{,}5 = 0$.

$\Delta = 34$; les solutions sont $\dfrac{-8-\sqrt{34}}{-2}$ et $\dfrac{-8+\sqrt{34}}{-2}$.

Or $0 \leq x \leq 3$, donc $x = \boxed{\dfrac{8-\sqrt{34}}{2} \text{ cm}} \approx 1{,}08$ cm.

Exercice n°90 page 41 Somme et produit des racines (2)

On pourra utiliser la conclusion de la question de l'exercice **89**.
Le célèbre tableau de Léonard de Vinci, « La Joconde », a une aire de 4 081 cm^2 et un périmètre de 260 cm.
Déterminer les dimensions du tableau.

Notons les dimensions L et l en cm telles que $L \geq l$. On a alors $\begin{cases} Ll = 4\,081 \\ 2(L+l) = 260 \end{cases}$, qui équivaut à :

$\begin{cases} L(130-L) = 4\,081 \\ l = 130 - L \end{cases}$; $\begin{cases} 130L - L^2 = 4\,081 \\ l = 130 - L \end{cases}$; $\begin{cases} L^2 - 130\,L + 4\,081 = 0 \\ l = 130 - L \end{cases}$.

Pour la première équation, on a : $\Delta = 576$, donc $\begin{cases} L = \dfrac{130-24}{2} \\ l = 130 - L \end{cases}$ ou $\begin{cases} L = \dfrac{130+24}{2} \\ l = 130 - L \end{cases}$;

soit $\begin{cases} L = 53 \\ l = 77 \end{cases}$ ou $\begin{cases} L = 77 \\ l = 53 \end{cases}$. Or on sait que $L \geq l$, donc les dimensions sont : $l = \boxed{53 \text{ cm}}$ et $L = \boxed{77 \text{ cm}}$.

3 SIGNE D'UN TRINÔME DU SECOND DEGRÉ

PROPRIÉTÉ ET DÉFINITION

Soit $f : x \longmapsto ax^2 + bx + c$ un trinôme du second degré, avec $a \neq 0$. Δ désigne le discriminant de f : $\Delta = b^2 - 4ac$.

- **Si $\Delta < 0$**, alors pour tout réel x, $ax^2 + bx + c$ est du **signe de a**.
- **Si $\Delta = 0$**, alors pour tout réel x, $ax^2 + bx + c$ est du **signe de a, ou nul pour $x = \dfrac{-b}{2a}$**.
- **Si $\Delta > 0$**, et si x_1 et x_2 sont les racines de f, avec $x_1 < x_2$, alors $ax^2 + bx + c$ est du signe de a pour $x \in]-\infty ; x_1[\cup]x_2 ; +\infty[$, et du signe de $(-a)$ pour $x \in]x_1 ; x_2[$.

Démonstration :

Cas $a < 0$: f admet le tableau de variations représenté ci-contre.

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	↗	$-\dfrac{\Delta}{4a}$	↘

- **Si $\Delta < 0$**, on a, du fait que $a < 0$: $\dfrac{-\Delta}{4a} < 0$.

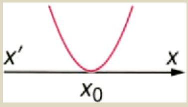
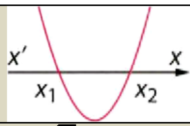
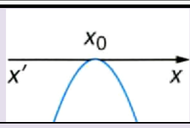
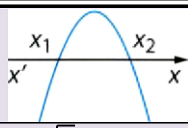
  Le maximum de f est donc strictement négatif : la fonction f est ainsi négative sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire du signe de a sur $\mathbb{R}$.

- **Si $\Delta = 0$**, admet 0 pour maximum : $f(x)$ est donc strictement négatif (du signe de a) pour tout réel $x \neq \dfrac{-b}{2a}$, et $f\left(\dfrac{-b}{2a}\right) = 0$.

- **Si $\Delta > 0$**, le maximum $\dfrac{-\Delta}{4a}$ est strictement positif, et f s'annule en $x_1 < \dfrac{-b}{2a}$ et $x_2 > \dfrac{-b}{2a}$. Avec les variations de f, on en déduit que $f(x) > 0$ pour $x \in]x_1 ; x_2[$, et $f(x) < 0$ pour $x \in]x_2 ; +\infty[$.

Cas $a > 0$: On raisonne de même, f présentant alors un minimum en $\dfrac{-b}{2a}$.

4 RÉCAPITULATIF

		$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
$a > 0$	**Courbe**			
	Solutions de $ax^2 + bx + c = 0$	Pas de solution.	$x_0 = \dfrac{-b}{2a}$	$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
	Signe de $ax^2 + bx + c$	$-\infty$ … $+\infty$: $+$	$-\infty$, x_0, $+\infty$: $+$ 0 $+$	$-\infty$, x_1, x_2, $+\infty$: $+$ 0 $-$ 0 $+$
$a < 0$	**Courbe**			
	Solutions de $ax^2 + bx + c = 0$	Pas de solution.	$x_0 = \dfrac{-b}{2a}$	$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
	Signe de $ax^2 + bx + c$	$-\infty$ … $+\infty$: $-$	$-\infty$, x_0, $+\infty$: $-$ 0 $-$	$-\infty$, x_1, x_2, $+\infty$: $-$ 0 $+$ 0 $-$

Exercice corrigé : ***résoudre une inéquation du second degré***

1) Étudier, suivant les valeurs du réel x, les signes des trinômes suivants :

a) $P(x) = 3x^2 + 6x - 9$; **b) $Q(x) = -x^2 - 4x - 4$.**

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (I) : $\dfrac{-6x-21}{-x^2-4x-4} > 3$.

Solution :

1) a) Le discriminant de $P(x)$ est : $\Delta = 6^2 - 4 \times 3 \times (-9) = 144$.

P a deux racines qui sont :

$$\frac{-6-\sqrt{144}}{2\times 3} = \frac{-6-12}{6} = -3 \text{ et } \frac{-6+\sqrt{144}}{2\times 3} = \frac{-6+12}{6} = 1.$$

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

b) On a $Q(x) = -(x^2 + 4x + 4) = -(x + 2)^2$.

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$Q(x)$		$-$	0	$-$	

2) $\dfrac{-6x-21}{-x^2-4x-4} > 3$ équivaut aux inéquations suivantes :

$$\frac{-6x-21}{-x^2-4x-4} - 3 > 0$$

Méthode :
On détermine les racines de P, puis on obtient le signe de $P(x)$ à partir de celui du coefficient a de x^2.

$Q(x)$ n'ayant qu'une racine, $\Delta = 0$ et $Q(x)$ est du signe de a qui vaut ici -1, sur $\mathbb{R}$.

On transforme l'inéquation pour avoir le membre de droite nul et se ramener ainsi à une étude de signes.

$$\frac{-6x - 21 - 3(-x^2 - 4x - 4)}{-(x^2 + 4x + 4)} > 0$$

$$\frac{3x^2 + 6x - 9}{-(x + 2)^2} > 0$$

$$\frac{\mathrm{P}(x)}{\mathrm{Q}(x)} > 0.$$

x	$-\infty$		-3		-2		1		$+\infty$
$\mathrm{P}(x)$		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
$\mathrm{Q}(x)$		$-$	|	$-$	0	$-$	|	$-$	
$\frac{\mathrm{P}(x)}{\mathrm{Q}(x)}$		$-$	0	$+$	||	$+$	0	$-$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation (I) est $[-3 ; 2[\cup]-2 ; 1[$.

On utilise un tableau de signes pour résoudre l'inéquation.
On matérialise une valeur interdite par une double barre.

Exercice n°13 page 27

Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$:

a) $2x^2 + x - 10 > 0$; **c)** $4x^2 - 36x + 81 \leq 0$; **e)** $-x^2 + 8x - 23 < 0$;
b) $3x^2 - 7x + 5 \leq 0$; **d)** $-9x^2 - 6x - 1 < 0$; **f)** $2x^2 + 2x + 40 \geq 0$.

a) Pour $2x^2 + x - 10 > 0$, on a $\Delta = 1 + 80 = 81$.

Les racines sont : $\frac{-1-9}{4} = -2{,}5$ et $\frac{-1+9}{4} = 2$.

x	$-\infty$		$-2{,}5$		2		$+\infty$
$2x^2 + x - 10$		$+$	0	$-$	0	$+$	

L'ensemble des solutions est : $S =]-\infty ; -2{,}5[\cup]2 ; +\infty[= \boxed{\mathbb{R} - [-2{,}5 , 2]}$.

b) Pour $3x^2 - 7x + 5 \leq 0$, on a $\Delta = 49 - 60 = -11$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$3x^2 - 7x + 5$		$+$	

L'ensemble des solutions est S = $\boxed{\varnothing}$.

c) Pour $4x^2 - 36x + 81 \leq 0$, on a $\Delta = 1\,296 - 1\,296 = 0$.

La racine est : $\frac{36}{8} = 4{,}5$.

x	$-\infty$		$4{,}5$		$+\infty$
$4x^2 - 36x + 81$		$+$	0	$+$	

L'ensemble des solutions est $S = \boxed{\{4{,}5\}}$.

d) Pour $-9x^2 - 6x - 1 < 0$, on a $\Delta = 36 - 36 = 0$.

La racine est : $\frac{6}{-18} = \frac{-1}{3}$.

x	$-\infty$		$\frac{-1}{3}$		$+\infty$
$-9x^2 - 6x - 1$		$-$	0	$-$	

L'ensemble des solutions est $S =]-\infty ; \frac{-1}{3} [\cup] \frac{-1}{3} ; +\infty[= \boxed{\mathbb{R} - \left\{\frac{-1}{3}\right\}}$.

e) Pour $-x^2 + 8x - 23 < 0$, on a $\Delta = 64 - 92 = -28$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$-x^2 + 8x - 23$		$-$	

L'ensemble des solutions est $S = \boxed{\mathbb{R}}$.

f) Pour $-2x^2 + 2x + 40 \geq 0$, on a $\Delta = 4 + 320 = 324$.

Les racines sont : $\frac{-2+18}{-4} = -4$ et $\frac{-2-18}{-4} = 5$.

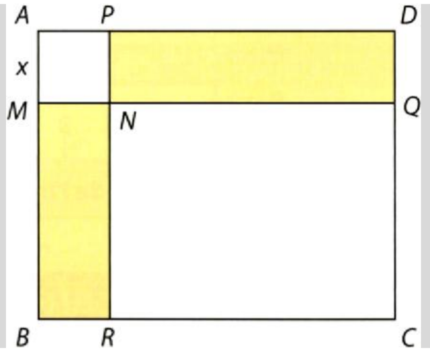
x	$-\infty$		-4		5		$+\infty$
$-2x^2 + 2x + 40$		$-$	0	$+$	0	$-$	

L'ensemble des solutions est : $S = \boxed{[-4 , 5]}$.

Exercice résolu n°15 page 28 *Résoudre un problème de maximum*

Dans un rectangle ABCD tel que AB = 8 et BC = 10, on construit le carré AMNP avec M sur [AB] et P sur [AD].
On construit ensuite les rectangles MBRN et PNQD avec R sur [BC] et Q sur [DC] que l'on colorie en jaune. On pose x = AM ; x appartient donc à [0 ; 8].

1) Exprimer en fonction de x l'aire totale $v(x)$ des deux rectangles coloriés en jaune.
2) Pour quelle valeur de x, $v(x)$ est-elle maximale et quelle est la valeur de ce maximum ?



1) $v(x) = MN \times MB + PN \times NQ = x(8 - x) + x(10 - x) = -2x^2 + 18x$.
2) $v(x) = 0$ équivaut à :
$-2x(x - 9) = 0$
$x = 0$ ou $x = 9$.
La parabole $\mathscr{P}$ représentant la fonction $x \longmapsto v(x)$ a donc un sommet S d'abscisse $\alpha = \dfrac{0 + 9}{2} = 4{,}5$ et d'ordonnée $\beta = v(\alpha) = 40{,}5$.
Comme -2 est négatif et $4{,}5$ appartient à $[0 ; 8]$, la fonction $x \longmapsto v(x)$ admet un maximum pour $x = 4{,}5$, qui vaut $40{,}5$.

Une fonction trinôme avec $a \neq 0$ admet un maximum atteint en a, abscisse du sommet S de la parabole qui la représente. Ici, on détermine les coordonnées de S, puis on vérifie que la valeur a trouvée appartient au domaine d'étude.

Exercice résolu n°16 page 29 *Étudier une fonction trinôme du second degré*

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-5 ; -10]$ par $f(x) = (4 - x)(x + 3)$.

1) Vérifier quel est une fonction trinôme ; décrire l'allure de sa représentation graphique $\mathscr{L}$.

1) $f(x) = (4 - x)(x + 3) = 4x + 12 - x^2 - 3x = x^2 + x + 12$.
f est bien une fonction trinôme. Donc $\mathscr{P}$ est une $\boxed{\text{parabole}}$.
On a $a = -1$; comme $a < 0$, le sommet de $\mathscr{P}$ est situé « vers le haut ».

On développe $f(x)$ pour obtenir la forme $ax^2 + bx + c$.
Le signe de a donne l'allure de $\mathscr{P}$.

2) Résoudre l'équation $f(x) = 0$. En déduire les coordonnées du sommet S de $\mathscr{P}$.

2) $f(x) = 0$ équivaut à :
$(4 - x)(x + 3) = 0$
$x = 4$ ou $x = 3$.
L'ensemble des solutions est $\boxed{\{4 , -3\}}$.
L'abscisse de S est $\alpha = \dfrac{4 + (-3)}{2} = 0{,}5$.
L'ordonnée de 5 est $\beta = f(\alpha) = 12{,}25$. Ainsi : S$\boxed{(0{,}5 , 12{,}25)}$.

On utilise la forme factorisée pour résoudre l'équation $f(x) = 0$.
L'abscisse du sommet de $\mathscr{P}$ est la demi-somme des solutions d'une équation du type $f(x) = 0$.

3) Dresser le tableau de variations de f.

3)

x	-5	-3	$0{,}5$	4	10
$f(x)$	-18 ↗	0 ↗	$12{,}25$ ↘	0 ↘	-78

Avec $a < 0$, f « croit avant l'abscisse du sommet et décroît ensuite ».
On calcule les images de -5 et 10.

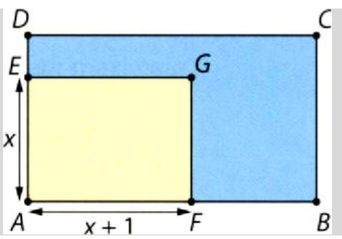
4) En déduire les solutions de l'inéquation : $f(x) < 0$.

4) D'après le tableau de variations, l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) < 0$ est $[-5 ; 3[\cup]4 ; 10]$.

Pour résoudre l'inéquation $f(x) < 0$, on place les valeurs de x, -3 et 4, dans le tableau de variations car leurs images part sont nulles.

Exercice résolu n°17 page 29 *Résoudre un problème à support géométrique*

On considère un rectangle ABCD tel que AB = 7 et BC = 4.
Étant donné un réel x compris entre 0 et 4, on place E sur le segment [AD] et F sur le segment [AB] tels que AE = x et AF = $x + 1$.
On place G tel que EAFG soit un rectangle.
Pour quelles valeurs de x l'aire du rectangle EAFG est-elle au moins égale à la moitié de l'aire du rectangle ABCD ?

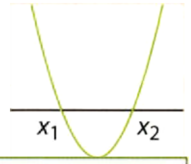


L'aire du rectangle EAFG est égale à AE × AF = $x(x + 1)$ et celle du rectangle ABCD vaut $7 \times 4 = 28$.
On est conduit à résoudre l'inéquation $x(x + 1) \geq \dfrac{28}{2}$:

L'expression « au moins égale » conduit à traduire le problème par une inéquation.

$x(x + 1) \geq 14$
$x^2 + x \geq 14$
$x^2 + x - 14 \geq 0$.

On calcule le discriminant du trinôme $x^2 + x - 14$:
$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-14) = 57$.
$\Delta > 0$ et $a > 0$ d'où l'allure de la parabole ci-contre.
On calcule les racines :
$x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{57}}{2 \times 1} = \dfrac{-1-\sqrt{57}}{2} \approx -4{,}27$ et $x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{57}}{2 \times 1} = \dfrac{-1+\sqrt{57}}{2} \approx 3{,}27$.



Ainsi, on a le tableau de signes ci-contre.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$x^2 + x - 14$		+	0	–	0	+	

Comme $x \in [0\ ;\ 4]$ l'aire de EAFG est au moins égale à la moitié de celle de ABCD pour tous les réels de l'intervalle $\left[\dfrac{-1+\sqrt{57}}{2}\ ,\ 4\right]$.

Une fois résolue l'inéquation $x^2 + x - 14 \geq 0$ on ne retient que les solutions qui vérifient la contrainte $x \in [0\ ;\ 4]$.

Exercice n°20 page 33

Pour chacune des questions suivantes, **une seule** réponse est correcte.

1) Le discriminant du trinôme $-2x^2 - 3x + 1$ vaut :	**a)** -1.	**b)** 1.	**c)** 17.
2) Le trinôme $x^2 - 4x + 4$:	**a)** n'a aucune racine.	**b)** a une racine.	**c)** a deux racines.
3) Le trinôme $-2x^2 + 5x + 3$:	**a)** est positif sur $\mathbb{R}$.	**b)** est négatif sur $\mathbb{R}$.	**c)** change de signe suivant les valeurs du réel x.

1) $\boxed{\text{c}}$.

2) $\boxed{\text{b}}$.

3) $\boxed{\text{c}}$.

Exercice n°21 page 33

Pour chacune des questions suivantes, indiquer **la (ou les)** bonne(s) réponse(s).

1) Le sommet d'une parabole représentant une fonction f a pour abscisse 1. On peut avoir, pour tout réel x :	**a)** $f(x) = -2x^2 + 4x - 5$	**b)** $f(x) = x^2 - 2x + 7$	**c)** $f(x) = 3x^2 - 9x + 6$
2) Suivant les valeurs du réel x, l'expression $4x^2 - 12x + 9$ peut être :	**a)** positive.	**b)** négative.	**c)** nulle.
3) Les équations $x^2 - 4x + 3 = 0$ et $x^2 - x + 6 = 0$	**a)** n'ont aucune solution commune.	**b)** ont une solution en commun.	**c)** ont deux solutions en commun.

1) $\boxed{\text{a et b}}$.

2) $\boxed{\text{a et c}}$.

3) $\boxed{\text{a}}$.

Exercice n°22 page 33

Préciser si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.
Soit une fonction : $x \longmapsto ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) représentée par une parabole $\mathcal{P}$ de sommet S.

1) Quand a est positif et Δ négatif, alors S est situé au-dessus de l'axe des abscisses.
2) Quand Δ est positif et S situé au-dessus de l'axe des abscisses, alors a est négatif.
3) L'ordonnée de S est toujours du même signe que Δ.
4) Si a et c sont non nuls et de signes contraires, alors $\mathcal{P}$ coupe deux fois l'axe des abscisses.

1) $\boxed{\text{Vrai}}$.

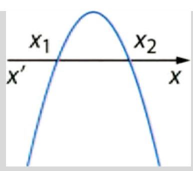
2) $\boxed{\text{Vrai}}$.

3) $\boxed{\text{Faux}}$.

4) $\boxed{\text{Vrai}}$.

Exercice n°23 page 33

Préciser si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.
Soit une fonction $f : x \longmapsto ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) dont la représentation graphique est une parabole comme celle représentée ci-contre.



1) a peut être positif.
2) Si $x_1 = -2$ et $x_2 = 4$, alors le sommet a pour abscisse 2.
3) Si x_1 et x_2 ont le même signe, alors c est un nombre négatif.

4) Si x_1 est l'opposé de x_2 , alors le sommet a pour ordonnée c.

1) $\boxed{\text{Faux}}$.

2) $\boxed{\text{Faux}}$.

3) $\boxed{\text{Vrai}}$.

4) $\boxed{\text{Vrai}}$.

Exercice n°7 page 44 Signe de $ax^2 + bx + c = f(x)$

→ Voir le **savoir-faire**, page 27.

Établir le tableau de signes de $f(x)$ puis écrire l'ensemble des solutions de l'inéquation proposée :

a) $f(x) = x^2 + x - 6$; $f(x) \geq 0$; **c)** $f(x) = 2x^2 + 5x + 4$; $f(x) \leq 0$; **e)** $f(x) = -3x^2 + 4x - 2$; $f(x) < 0$.
b) $f(x) = -2x^2 + x + 1$; $f(x) > 0$; **d)** $f(x) = 4x^2 + 28x + 49$; $f(x) \leq 0$;

Méthode :
On résout l'équation $f(x) = 0$, puis :
- soit on positionne la parabole associée par rapport à l'axe des abscisses selon les signes de a et Δ,
- soit on applique le résultat : $ax^2 + bx + c$ est du signe de a sauf pour les valeurs de x situées entre les racines quand il y en a deux.

Dans tout l'exercice, on note S l'ensemble des solutions.

a) $f(x) = x^2 + x - 6$; les racines sont 2 et –3.

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S =]-\infty ; -3] \cup [2 ; +\infty[= \boxed{\mathbb{R} -]-3 , 2[}$.

b) $f(x) = -2x^2 + x + 1$; les racines sont 1 et –0,5.

x	$-\infty$		$-0{,}5$		1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$S = \boxed{]-0{,}5 , 1[}$.

c) $f(x) = 2x^2 + 5x + 4$; $\Delta < 0$, il n'y a pas de racine.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	

$S = \boxed{\varnothing}$.

d) $f(x) = 4x^2 + 28x + 49 = (2x)^2 + 2 \times 2x \times 7 + 7^2 = (2x + 7)^2$.

x	$-\infty$		$\frac{-7}{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$+$	

$S = \boxed{\left\{\frac{-7}{2}\right\}}$.

e) $f(x) = -3x^2 + 4x - 2$; $\Delta = -8$, il n'y a pas de racine.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	

$S = \boxed{\mathbb{R}}$.

Exercice n°69 page 38 Vrai ou faux ?

« Le tableau de signes proposé peut être celui d'un trinôme. » Dans chaque cas, préciser si cette phrase est vraie ou fausse.

1)

$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$

2)

$f(x)$	$+$	0	$-$

3)

$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

4)

$f(x)$	$+$	0	$+$

5)

$f(x)$	$-$	0	$-$	0	$-$

6)

$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

1) $\boxed{\text{Faux}}$. **2)** $\boxed{\text{Faux}}$. **3)** $\boxed{\text{Vrai}}$. **4)** $\boxed{\text{Vrai}}$. **5)** $\boxed{\text{Faux}}$. **6)** $\boxed{\text{Vrai}}$.

Exercice n°77 page 39

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes : **a)** $\frac{x^2}{x + 2} > 1$; **b)** $\frac{-3x + 1}{2 - x} \leq \frac{-4x + 5}{x + 3}$.

Indication : Utiliser des tableaux de signes qui tiendront compte des signes des dénominateurs. Attention on ne peut pas multiplier de part et d'autre dans une inéquation par une expression dont on ne connaît pas le signe !

Dans tout l'exercice, on note S l'ensemble des solutions.

a) Pour $x \neq -2$, $\dfrac{x^2}{x+2} > 1$ équivaut à : $\dfrac{x^2-(x+2)}{x+2} > 0$, soit à : $\dfrac{x^2-x-2}{x+2} > 0$.

Pour $x^2 - x - 2$, on a : $\Delta = 1 + 8 = 9$; il y a deux racines :

$\dfrac{1-3}{2} = -1$ et $\dfrac{1+3}{2} = 2$.

S = $\boxed{]-2\,,-1[\,\cup\,]2\,,+\infty[}$.

x	$-\infty$	-2		-1		2	$+\infty$
x^2-x-2	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$\dfrac{x^2-x-2}{x+2}$	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$

b) Pour $x \neq 2$ et $x \neq -3$, $\dfrac{-3x+1}{2-x} \leq \dfrac{-4x+5}{x+3}$ équivaut à : $\dfrac{(-3x+1)(x+3)-(-4x+5)(2-x)}{(2-x)(x+3)} \leq 0$, soit à :

$\dfrac{-3x^2-9x+x+3-(-8x+4x^2+10-5x)}{(2-x)(x+3)} \leq 0$

$\dfrac{-7x^2+5x-7}{(2-x)(x+3)} \leq 0$.

Pour $-7x^2 + 5x - 7$, on a : $\Delta = 25 - 196 = -171$.

S = $\boxed{]-3\,,2[}$.

x	$-\infty$	-3		2	$+\infty$
$-7x^2+5x-7$	$-$		$-$		$-$
$2-x$	$+$		$+$	0	$-$
$x+3$	$-$	0	$+$		$+$
$\dfrac{-7x^2+5x-7}{(2-x)(x+3)}$	$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$

Exercice n°79 page 39

On considère l'inéquation : $3x^4 - 13x^2 + 4 > 0$.

1) Déterminer les racines du trinôme $3X^2 - 13X + 4$.

2) En déduire une factorisation de $3X^2 - 13X + 4$.

3) Résoudre alors l'inéquation proposée dans $\mathbb{R}$.

1) Pour $3X^2 - 13X + 4$, $\Delta = 121$ et les racines sont $\boxed{4 \text{ et } \dfrac{1}{3}}$.

2) $3X^2 - 13X + 4 = \boxed{(X-4)(3X-1)}$.

3) $3x^4 - 13x^2 + 4 > 0$ équivaut à :

$(x^2-4)(3x^2-1) > 0$.

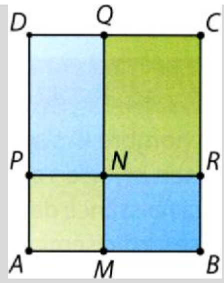
L'ensemble de solutions est : S = $\boxed{]-\infty\,,-2[\,\cup\,]-\sqrt{\dfrac{1}{3}}\,,\sqrt{\dfrac{1}{3}}[\,\cup\,]2\,,+\infty[}$.

Exercice n°96 page 41 Affiche publicitaire

La figure ci-contre représente un panneau rectangulaire de 8 mètres (AB = 8) sur 10 (BC = 10) partagé en quatre zones : un carré AMNP et trois rectangles MBRN, NRCQ et PNQD. Deux artistes sont invités à s'exprimer sur ce panneau : Amélie sur la zone verte et Wilson sur la zone bleue. On désire que la zone attribuée à Amélie soit au moins égale à celle attribuée à Wilson.

Problème : quelles sont les positions possibles du point M sur le segment [AB] ?

On note x la distance AM ; ainsi $x \in [0 ; 8[$.



1) Exprimer en fonction de x l'aire de chacune des deux zones (la verte et la bleue).

2) Montrer que résoudre le problème posé revient à résoudre l'inéquation $x^2 - 9x + 20 \geq 0$ dans l'intervalle $[0 ; 8]$.

3) Conclure.

1) L'aire de la zone bleue est : $B(x) = x(8-x) + x(10-x) = \boxed{-2x^2 + 18x}$

et l'aire de la zone verte est : $V(x) = x^2 + (8-x)(10-x) = \boxed{2x^2 - 18x + 80}$.

2) On a $0 \leq AM \leq AB$, soit $0 \leq x \leq 8$.

$V(x) \geq B(x)$ équivaut alors à :

$4x^2 - 36x + 80 \geq 0$

$x^2 - 9x + 20 \geq 0$.

3) $\Delta = 1$; les racines sont 4 et 5, donc $\boxed{x \in [0\,,4] \cup [5\,,8]}$.