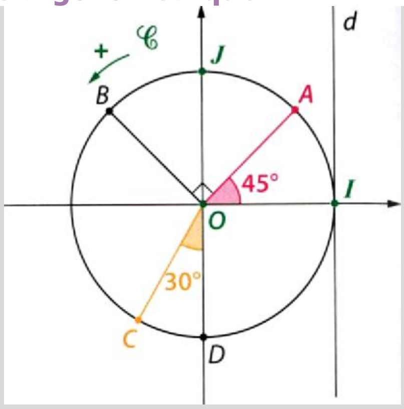
Ch.6 : Trigonométrie

Exercice n°A page 228 : Enroulement de la droite des réels sur le cercle trigonométrique

Vrai ou faux ?



On considère le cercle trigonométrique de centre O, et le repère orthonormé (O ; I, J). Dans l'enroulement des réels sur le cercle, le point I est associé au réel 0, et le point J à $\frac{\pi}{2}$.

D est le point diamétralement opposé à J et A, B, C sont des points du cercle définis comme l'indique la figure ci-contre.
Préciser si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1) Le point A est associé au réel $\frac{\pi}{4}$ dans l'enroulement de la droite des réels autour du cercle.
2) Au point B, on peut associer le réel $\frac{-3\pi}{4}$.
3) L'arc de cercle d'origine A, d'extrémité B et passant par J a pour longueur $\frac{\pi}{2}$.
4) Le réel $\frac{34\pi}{3}$ est associé au point C.
5) Tous les réels associés au point D sont négatifs.

1) Vrai.
2) Faux.
3) Vrai.
4) Vrai.
5) Faux.

Exercice n°B page 198 : Cosinus et sinus d'un réel

Q.C.M.

Pour chacune des affirmations suivantes, préciser **la (ou les)** bonne(s) réponse(s).

1) Pour tout réel $x \in \left[0\,,\frac{\pi}{2}\right]$:	a) $\cos x \geq 0$ et $\sin x \geq 0$	b) $\cos x \leq 0$ et $\sin x \geq 0$	c) $\cos x \geq 0$ et $\sin x \leq 0$
2) Si on appelle x un réel associé au point B de la figure ci-dessus, alors :	a) $\cos x \leq 0$	b) $\sin x = 0{,}5$	c) $\cos x \geq -1$
3) Si un point M du cercle trigonométrique est associé au réel x, alors :	a) les coordonnées de M dans le repère (O ; I, J) sont ($\cos x$; $\sin x$)	b) les coordonnées de M dans le repère (O ; I, J) sont ($\sin x$; $\cos x$)	c) $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
4) $\cos(2\,011\pi)$ est égal à :	a) 0	b) 1	c) –1
5) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ est la valeur exacte de :	a) $\sin \frac{\pi}{3}$	b) $\cos \frac{\pi}{6}$	c) $\cos\left(\frac{-\pi}{6}\right)$

1) a.
2) a et c.
3) a et c.
4) c.
5) a, b et c.

Activité n°1 page 230 : Mesure d'angles orientés de vecteurs

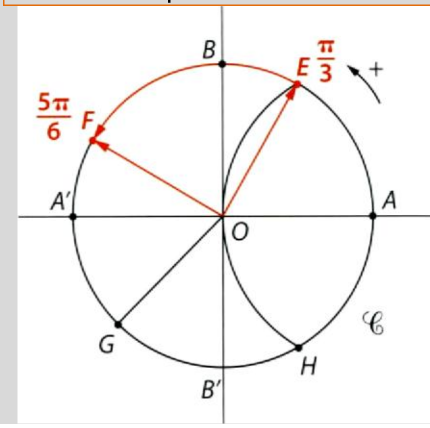
L'enroulement de $\mathbb{R}$ sur $\mathcal{C}$ permet de définir des mesures pour les couples de vecteurs unitaires.
Si M et N sont deux points de $\mathcal{C}$, associés respectivement aux réels t et s, on définit une mesure du couple $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON})$ par la différence $s - t$.

Définition :
On dit que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est unitaire lorsque $AB = 1$.

Ainsi, par exemple, le couple $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OE})$ mesure $\frac{\pi}{3}$ le couple $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OF})$ mesure $\frac{5\pi}{6}$,

et le couple $(\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OF})$ mesure $\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$.

Sur la figure ci-contre, la droite (OG) est la médiatrice du segment [A′ B′].



Partie A - Avec des vecteurs unitaires

1) Déterminer les mesures des couples de vecteurs suivants :

a) $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OG})$; **c)** $(\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OE})$; **e)** $(\overrightarrow{OG}, \overrightarrow{OF})$;
b) $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OH})$; **d)** $(\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OG})$; **f)** $(\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OH})$.

Partie A – Avec des vecteurs unitaires

1)

a) $(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OG})$ a pour mesure $\boxed{\frac{-3\pi}{4}}$.

b) $(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OH})$ a pour mesure $\boxed{\frac{-\pi}{3}}$.

c) $(\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OE})$ a pour mesure $\frac{\pi}{3} - \frac{-\pi}{3} = \boxed{\frac{2\pi}{3}}$.

d) $(\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OG})$ a pour mesure $\frac{-3\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = \frac{-9\pi}{12} + \frac{4\pi}{12} = \boxed{\frac{-5\pi}{12}}$.

e) $(\overrightarrow{OG}, \overrightarrow{OF})$ a pour mesure $\frac{5\pi}{6} + \frac{3\pi}{4} = \boxed{\frac{19\pi}{12}}$.

f) $(\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OH})$ a pour mesure $\frac{-\pi}{3} - \pi = \boxed{\frac{-4\pi}{3}}$.

2) a) Déterminer les couples de la liste précédente dont les mesures sont égales, à 2π près : on dit qu'ils représentent le même « angle orienté de vecteurs ».
b) Pour ceux qui restent seuls, déterminer un couple de vecteurs qui représente le même angle orienté (qui ait la même mesure), en se limitant à utiliser les points donnés sur la figure.

2) **a)** Couples dont les mesures sont égales à 2π près : $\boxed{(\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OG}) \text{ et } (\overrightarrow{OG}, \overrightarrow{OF})}$; $\boxed{(\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OE}) \text{ et } (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OH})}$.

b) $(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OG})$ représente le même angle orienté que $\boxed{(\overrightarrow{OG}, \overrightarrow{OB})}$.

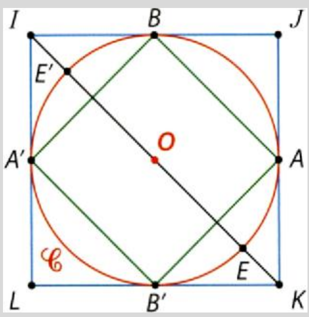
$(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OH})$ représente le même angle orienté que $\boxed{(\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OA})}$.

Partie B - Avec des vecteurs quelconques non nuls

Le carré IJKL est circonscrit au cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ et $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{A'A}$.
On construit le carré ABAB′ de centre O.

1) a) Construire le vecteur $\overrightarrow{OC}$ unitaire, de même direction et de même sens que $\overrightarrow{OJ}$.
b) Déterminer le représentant d'origine O du vecteur unitaire, de même direction et de même sens que $\overrightarrow{JI}$. Faire de même pour le vecteur $\overrightarrow{LI}$.

2) Associer à chaque couple de vecteurs un couple de vecteurs unitaires, ayant même direction et même sens et d'origine O, puis déterminer une mesure de l'angle orienté correspondant.



Exemple : À $(\overrightarrow{LI}, \overrightarrow{IK})$, on associe $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OE})$ de mesure $\frac{-3\pi}{4}$.

a) $(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{LJ})$; **c)** $(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{KL})$; **e)** $(\overrightarrow{LO}, \overrightarrow{IE'})$;
b) $(\overrightarrow{JI}, \overrightarrow{OB})$; **d)** $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{KJ})$; **f)** $(\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{LJ})$.

Remarque : Les couples de vecteurs $(\overrightarrow{LI}, \overrightarrow{IK})$, $(\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{LJ})$, $(\overrightarrow{OA'} ; \overrightarrow{OC})$ et $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OE})$ ont tous la même mesure $\frac{-3\pi}{4}$:

tous ces couples représentent le même angle orienté de mesure $\frac{-3\pi}{4}$.

En pratique, on confondra le couple des vecteurs avec l'angle orienté qu'il représente et avec sa mesure.

On écrira donc, pour simplifier : $(\overrightarrow{LI}, \overrightarrow{IK}) = (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{DE}) = \frac{-3\pi}{4}\ (2\pi)$.

Partie B – Avec des vecteurs quelconques non nuls

1) a) Le point C est à l'intersection entre le segment [OJ] et le cercle trigonométrique.

b) Ce sont respectivement les vecteurs $\boxed{\overrightarrow{OA'}}$ et $\boxed{\overrightarrow{OB}}$.

2)

a) À $(\overrightarrow{IJ}\ ;\ \overrightarrow{LJ})$ on associe $\boxed{(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})}$ de mesure $\boxed{\frac{\pi}{4}}$.

b) À $(\overrightarrow{JI}\ ;\ \overrightarrow{OB})$ on associe $\boxed{(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})}$ de mesure $\boxed{\frac{-\pi}{2}}$.

c) À $(\overrightarrow{IJ}\ ;\ \overrightarrow{KL})$ on associe $\boxed{(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'})}$ de mesure $\boxed{\pi}$.

d) À $(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{KJ})$ on associe $\boxed{(\overrightarrow{OE'}, \overrightarrow{OB})}$ de mesure $\boxed{\frac{-\pi}{4}}$.

e) À $(\overrightarrow{LO}\ ;\ \overrightarrow{IE})$ on associe $\boxed{(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OE})}$ de mesure $\boxed{\frac{-\pi}{2}}$.

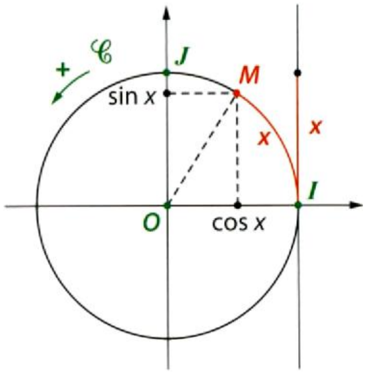
f) À $(\overrightarrow{AA'}\ ;\ \overrightarrow{LJ})$ on associe $\boxed{(\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OI})}$ de mesure $\boxed{\frac{-3\pi}{4}}$.

1 MESURES DES ANGLES ORIENTÉS DE VECTEURS

1.1 Rappels

- On appelle « plan orienté » un plan dans lequel tous les cercles sont orientés dans le sens contraire des aiguilles d'une montre, appelé « sens direct ».
- On considère dans un plan orienté un cercle $\mathcal{C}$ de centre O passant par le point I. En traçant la tangente à $\mathcal{C}$ en I, **on peut associer à tout réel x un unique point de $\mathcal{C}$, en « enroulant » la droite autour du cercle.**

  Le point J de $\mathcal{C}$, associé au réel $\frac{\pi}{2}$, permet de définir **un repère *orthonormé direct* (O ; I, J) du plan orienté.**



- Si le point M est associé à un réel x, alors il est aussi associé à tout réel de la forme $x + k \times 2\pi$ où k est un entier relatif.
- Si M est le point du cercle associé au réel x, les coordonnées de M dans le repère (O ; I, J) sont $(\cos x\ ;\ \sin x)$.

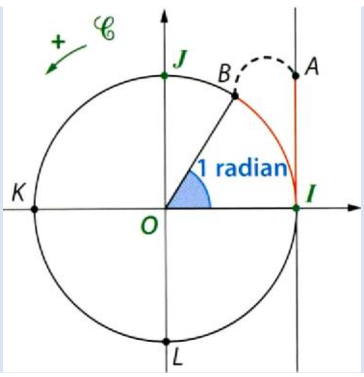
1.2 Le radian

DÉFINITION 1

Soit M un point d'un cercle trigonométrique.
On appelle mesure en **radian** de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$ tout nombre réel x associé au point M.

Remarques :

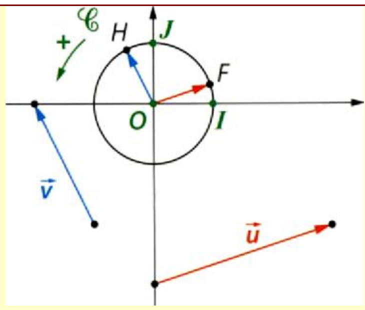
- Sur la figure ci-contre on a : IA = 1. La mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB})$ est alors de **1 radian** ; la **longueur de l'arc $\overset{\frown}{IB}$ est égale à 1**.
- La longueur du cercle trigonométrique étant égale à 2π et l'angle plein mesurant 360 degrés, on a la correspondance π rad = 180°.



1.3 Angle orienté de deux vecteurs

DÉFINITIONS 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O ; I, J).
On considère deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et on construit sur le cercle trigonométrique les points F et H tels que $\overrightarrow{OF}$ soit colinéaire et de même sens que $\vec{u}$ et $\overrightarrow{OH}$ soit colinéaire et de même sens que $\vec{v}$.



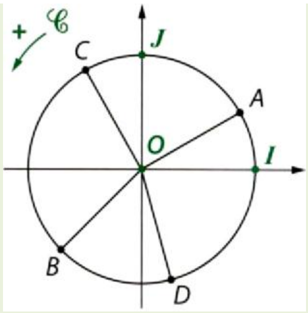
- La mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$ est égale à celle de l'angle orienté $(\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{OH})$.
- Pour tout réel x associé au point F et tout réel y associé au point H, **$y - x$ est une mesure en radian de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$.**
- L'unique mesure en radian de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$ appartenant à l'intervalle $]-\pi ; \pi]$ est appelé la **mesure principale** de cet angle orienté.

Remarque :

Si α est une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$, alors les autres mesures de cet angle orienté sont les réels $\alpha + k \times 2\pi$ où k est un entier relatif. On note $(\vec{u}, \vec{v}) = \alpha + k \times 2\pi$ ou $(\vec{u}, \vec{v}) = \alpha\ (2\pi)$, qu'on lit « α modulo 2π ».

Exercice corrigé : ***Déterminer la mesure principale d'un angle orienté***

On considère les points A, B, C et D du cercle trigonométrique 𝒞, associés respectivement aux réels $\frac{37\pi}{6}$, $\frac{29\pi}{4}$, $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{-5\pi}{12}$.



1) Déterminer les mesures principales des angles orientés $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA})$ et $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB})$.

2) Démontrer que : (OA) ⊥ (OC).

3) Déterminer les mesures principales des angles orientés $(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OA})$ et $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB})$.

4) Préciser une mesure en degré de l'angle $(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OA})$.

Solution :

1) Une mesure en radian de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA})$ est $\frac{37\pi}{6}$.

$$\frac{37\pi}{6} = \frac{36\pi + \pi}{6} = 6\pi + \frac{\pi}{6} = 3 \times 2\pi + \frac{\pi}{6},$$

donc $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA})$ a pour mesure principale $\frac{\pi}{6}$.

Une mesure en radian de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB})$ est $\frac{29\pi}{4}$.

$$\frac{29\pi}{4} = \frac{32\pi - 3\pi}{4} = 8\pi - \frac{3\pi}{4} = 4 \times 2\pi - \frac{3\pi}{4},$$

donc $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB})$ a pour mesure principale $\frac{-3\pi}{4}$.

2) Les points A et C sont respectivement associés aux réels $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{2\pi}{3}$;

donc une mesure en radian de $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})$ est $\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{4\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$.

Donc (OA) ⊥ (OC).

Méthode :
Tout réel x associé à M est une mesurer en radian de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$.

Les réels x et $x + k \times 2\pi$ avec k entier sont des mesures du même angle orienté.
La mesure principale est l'unique mesure qui appartient à l'intervalle $]-\pi ; \pi]$.

Si les points M et N de 𝒞 sont respectivement associés aux réels x et y alors une mesure de $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON})$ est $y - x$.

3) Une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OA})$ est $\frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{12} = \frac{7\pi}{12}$; c'est sa mesure principale.

Une mesure en radian de l'angle $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB})$ est : $\frac{-3\pi}{4} - \frac{2\pi}{3} = \frac{-9\pi - 8\pi}{12} = \frac{-17\pi}{12}$.

Ce n'est pas sa mesure principale, car $\frac{-17\pi}{12} \notin]-\pi ; \pi]$.

Or $\frac{-17\pi}{12} = \frac{-24\pi + 7\pi}{12} = -2\pi + \frac{7\pi}{12}$. La mesure principale de $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB})$ est également $\frac{7\pi}{12}$. On en déduit que $(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OA}) = (\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB})$.

Deux angles orientés sont égaux si, et seulement si, ils ont la même mesure principale.

4) $\frac{7\pi}{12}$ rad = $\frac{7 \times 180}{12}$ degrés = 105°.

180° = π rad.

Exercice n°1 page 233

Déterminer une mesure en radian positive de l'angle orienté ($\overrightarrow{OI}$, $\overrightarrow{OM}$) sachant que le point M du cercle trigonométrique est associé au réel $x = \frac{-2\pi}{5}$.

On a par exemple : $\frac{-2\pi}{5} + 2\pi = \boxed{\frac{8\pi}{5}}$.

Exercice n°2 page 233

Recopier et compléter le tableau suivant :

Mesure en degré	10			72	150
Mesure en radian		$\frac{\pi}{10}$	$\frac{3\pi}{8}$		

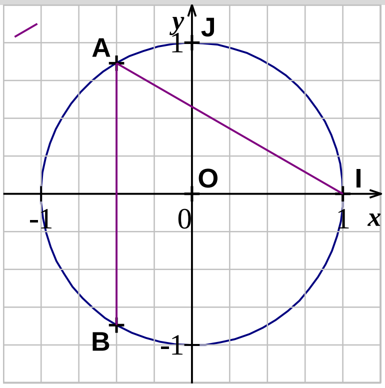
Mesure en degré	180	10	$\boxed{18}$	$\boxed{67,5}$	72	150
Mesure en radian	π	$\boxed{\frac{\pi}{18}}$	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\boxed{\frac{2\pi}{5}}$	$\boxed{\frac{5\pi}{6}}$

Exercice n°3 page 233

(O ; I, J) est un repère orthonormé direct, et le triangle IAB est équilatéral direct de centre O.

1) Donner un réel associé à chacun des points A et B du cercle trigonométrique de centre O.

2) Déterminer la mesure principale des angles orientés suivants :
($\overrightarrow{OI}$, $\overrightarrow{OA}$), ($\overrightarrow{OI}$, $\overrightarrow{OB}$), ($\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$), ($\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{AB}$) et ($\overrightarrow{IO}$, $\overrightarrow{IA}$).



1) A et B sont respectivement associés à $\boxed{\frac{2\pi}{3}}$ et $\boxed{\frac{-2\pi}{3}}$.

2) ($\overrightarrow{OI}$, $\overrightarrow{OA}$) = $\boxed{\frac{2\pi}{3}}$.

($\overrightarrow{OI}$, $\overrightarrow{OB}$) = $\boxed{\frac{-2\pi}{3}}$.

($\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$) = $\boxed{\frac{2\pi}{3}}$.

($\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{AB}$) = $\boxed{\frac{-\pi}{3}}$, c'est la mesure d'un des angles du triangle IAB dans le sens indirect.

($\overrightarrow{IO}$, $\overrightarrow{IA}$) = $\boxed{\frac{-\pi}{6}}$, c'est la moitié de la mesure d'un angle du triangle pris dans le sens indirect.

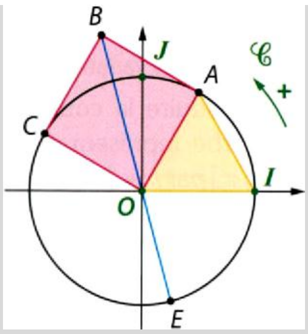
Exercice n°3 page 252 Mesure principale d'un angle orienté

→ Voir le **savoir-faire** page 233.

Sur le schéma ci-contre, on a tracé le cercle trigonométrique et le repère orthonormé direct (O ; I, J). Les points A, B, C et E sont placés tels que OIA est un triangle équilatéral, OABC est un carré et B, O et E sont alignés, comme l'indique la figure ci-contre.

1) Donner la mesure principale de chacun des angles orientés suivants :
($\overrightarrow{OI}$, $\overrightarrow{OA}$) ; ($\overrightarrow{OI}$, $\overrightarrow{OC}$) ; ($\overrightarrow{OI}$, $\overrightarrow{OE}$).

2) Calculer la mesure principale de chacun des angles orientés suivants :
($\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OC}$) ; ($\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OE}$) ; ($\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OE}$) ; ($\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OA}$).



Méthode :
Pour tout réel x associé au point F du cercle trigonométrique et tout réel y associé au point H, $y - x$ est une mesure en radian de l'angle orienté ($\overrightarrow{OF}$, $\overrightarrow{OH}$). Voir le cours, page 232.

Dans tout l'exercice, on note k un entier relatif.

1) ($\overrightarrow{OI}$, $\overrightarrow{OA}$) = $\boxed{\frac{\pi}{3}} + k2\pi$.

($\overrightarrow{OI}$, $\overrightarrow{OC}$) = $\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} + k2\pi = \boxed{\frac{5\pi}{6}} + k2\pi$.

($\overrightarrow{OI}$, $\overrightarrow{OB}$) = $\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} + k2\pi = \frac{7\pi}{12} + k2\pi$, d'où ($\overrightarrow{OI}$, $\overrightarrow{OE}$) = ($\overrightarrow{OI}$, $\overrightarrow{OB}$) $- \pi + k2\pi = \frac{7\pi}{12} - \pi + k2\pi = \boxed{\frac{-5\pi}{12}} + k2\pi$.

2) $(\vec{OA}, \vec{OC}) = (\vec{OI}, \vec{OC}) - (\vec{OI}, \vec{OA}) = \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{3} + k2\pi = \frac{3\pi}{6} + k2\pi = \boxed{\frac{\pi}{2}} + k2\pi.$

$(\vec{OC}, \vec{OE}) = (\vec{OI}, \vec{OE}) - (\vec{OI}, \vec{OC}) = \frac{-5\pi}{12} - \frac{5\pi}{6} + k2\pi = \frac{-15\pi}{12} + k2\pi = \frac{-5\pi}{4} + k2\pi = \frac{-5\pi}{4} + 2\pi + k2\pi = \boxed{\frac{3\pi}{4}} + k2\pi.$

$(\vec{OA}, \vec{OE}) = (\vec{OI}, \vec{OE}) - (\vec{OI}, \vec{OA}) = \frac{-5\pi}{12} - \frac{\pi}{3} + k2\pi = \frac{-9\pi}{12} + k2\pi = \boxed{\frac{-3\pi}{4}} + k2\pi.$

$(\vec{OB}, \vec{OA}) = (\vec{OI}, \vec{OA}) - (\vec{OI}, \vec{OB}) = \frac{\pi}{3} - \frac{7\pi}{12} + k2\pi = \frac{-3\pi}{12} + k2\pi = \boxed{\frac{-\pi}{4}} + k2\pi.$

Exercice n°4 page 252 Conversions

Voir le **savoir-faire** page 233.

1) Convertir en radian les mesures d'angles suivantes exprimées en degré : 15°, 40°, 50°, 63°, 125°.

2) Convertir en degré les mesures suivantes exprimées en radian : $\frac{\pi}{6}$; $\frac{3\pi}{10}$; $\frac{11\pi}{12}$; $\frac{\pi}{36}$; $\frac{17\pi}{25}$.

Méthode :

On a la correspondance π rad = 180°.

1)

Degrés	180	15	40	50	63	125
Radians	π	$\boxed{\frac{\pi}{12}}$	$\boxed{\frac{2\pi}{9}}$	$\boxed{\frac{5\pi}{18}}$	$\boxed{\frac{7\pi}{20}}$	$\boxed{\frac{25\pi}{36}}$

2)

Radians	π	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{11\pi}{12}$	$\frac{\pi}{36}$	$\frac{17\pi}{25}$
Degrés	180	$\boxed{30}$	$\boxed{54}$	$\boxed{165}$	$\boxed{5}$	$\boxed{122,4}$

Exercice n°13 page 239 *Déterminer des mesures d'angles orientés*

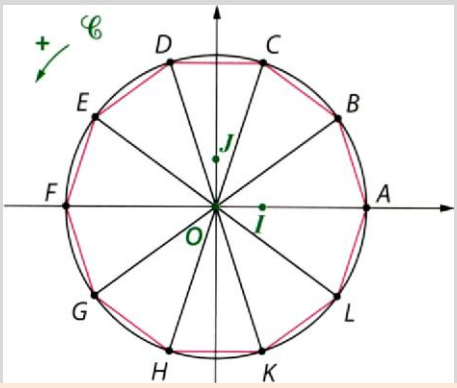
Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct (O ; I, J), on considère le décagone régulier direct ABCDEFGHKL avec A appartenant à la demi-droite [OI). (Un décagone régulier est un polygone qui a dix côtés de même longueur et ses dix angles sont égaux.)

1) Déterminer une mesure positive en radian de chacun des angles orientés suivants : $(\vec{OA}, \vec{OB})$; $(\vec{OA}, \vec{OE})$; $(\vec{OA}, \vec{OH})$.

2) Déterminer une mesure négative en radian de chacun des angles orientés suivants : $(\vec{OA}, \vec{OD})$; $(\vec{OA}, \vec{OK})$; $(\vec{OA}, \vec{OC})$.

3) **a)** Quelle est la nature du triangle OEF ? En déduire une mesure de l'angle orienté $(\vec{FO}, \vec{FE})$.

b) Quelle est la nature du triangle AEF ? En déduire une mesure de l'angle orienté $(\vec{AE}, \vec{AF})$.



1) • L'angle $\widehat{AOB}$ mesure $\frac{1}{10} \times 360°$, c'est-à-dire $\frac{1}{10} \times 2\pi$ rad.

360° = 2π rad.

Donc une mesure positive de $(\vec{OA}, \vec{OB})$ est par exemple $\frac{\pi}{5}$.

• $\widehat{AOE} = 4 \times \widehat{AOB} = \frac{4\pi}{5}$, donc $\frac{4\pi}{5}$ est une mesure de l'angle orienté $(\vec{OA}, \vec{OE})$.

• De même, $\widehat{AOH} = 3 \times \widehat{AOL} = \frac{3\pi}{5}$. Or on tourne dans le sens indirect, donc $(\vec{OA}, \vec{OH}) = \frac{-3\pi}{5}\ (2\pi)$.

Une mesure positive de $(\vec{OA}, \vec{OH})$ est donc $\frac{-3\pi}{5} + 2\pi = \frac{7\pi}{5}$. On aurait pu donner comme autre mesure positive $\frac{-3\pi}{5} + 4\pi = \frac{17\pi}{5}$, par exemple.

2) • $(\vec{OA}, \vec{OD}) = \frac{3\pi}{5}\ (2\pi)$ (on procède comme pour $(\vec{OA}, \vec{OE})$ dans **1)**).

Une mesure négative de $(\vec{OA}, \vec{OD})$ est donc $\frac{3\pi}{5} - 2\pi = \frac{-7\pi}{5}$.

Si t est une mesure d'un angle orienté, alors cet angle a aussi pour mesures $t + k \times 2\pi$ avec k entier relatif.

- De même, $\dfrac{-2\pi}{5}$ est une mesure négative de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OK})$.
- Enfin, une mesure négative de $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})$ est $\dfrac{2\pi}{5} - 2\pi = \dfrac{-8\pi}{5}$. (Mais aussi, par exemple, $\dfrac{2\pi}{5} - 10\pi = \dfrac{-48\pi}{5}$.)

3) a) Le triangle OEF est isocèle de sommet O, car [OE] et [OF] sont deux rayons du cercle circonscrit au décagone.

De plus, une mesure de $(\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OF})$ est donc une mesure de $(\overrightarrow{FO}, \overrightarrow{FE})$ est $\dfrac{\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right)}{2} = \dfrac{2\pi}{5}$.

Dans un triangle, la somme des angles orientés directs est égale à π (2π).

b) Le triangle AEF est rectangle en E, car E appartient au cercle de diamètre [AF].

$(\overrightarrow{FA}, \overrightarrow{FE}) = (\overrightarrow{FO}, \overrightarrow{FE}) = \dfrac{2\pi}{5}$ (2π), car F, O et A sont alignés dans cet ordre.

$(\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EA}) = \dfrac{\pi}{2}$ (2π) grâce au triangle rectangle, donc une mesure de $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AF})$ est :

$\pi - \left(\dfrac{2\pi}{5} + \dfrac{\pi}{2}\right) = \pi - \dfrac{9\pi}{10} = \dfrac{\pi}{10}$.

Si l'on rejoint un point d'un cercle aux extrémités d'un diamètre de ce cercle, alors on forme un triangle rectangle en ce point.

Exercice n°18 page 243 Q.C.M.

Dans chacun des cas suivants, indiquer **la (ou les)** bonne(s) réponse(s).
On considère le cercle trigonométrique associé au repère orthonormé direct (O ; I, J).

1) L'angle orienté de mesure $\dfrac{17\pi}{3}$ a aussi pour mesure :	**a)** $\dfrac{2\pi}{3}$	**b)** $\dfrac{-\pi}{3}$	**c)** $\dfrac{2\,009\pi}{3}$
2) Le point M du cercle tel que $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) = \dfrac{-3\pi}{4}$ a pour coordonnées :	**a)** $\left(\dfrac{-\sqrt{2}}{2}, \dfrac{-\sqrt{2}}{2}\right)$	**b)** $\left(\dfrac{-\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$	**c)** $\left(\cos\dfrac{3\pi}{4}, -\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$
3) Les angles orientés de mesures principales $\dfrac{\pi}{3}$ et $\dfrac{2\pi}{3}$ ont :	**a)** le même cosinus et des sinus opposés	**b)** des cosinus opposés et le même sinus	**c)** des cosinus opposés et des sinus opposés
4) Les angles orientés de mesures principales $\dfrac{\pi}{4}$ et $\dfrac{-\pi}{4}$ ont :	**a)** le même cosinus et des sinus opposés	**b)** des cosinus opposés et le même sinus	**c)** des cosinus opposés et des sinus opposés
5) Si $\widehat{AOB} = 72°$, une mesure en radian de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ peut être :	**a)** $\dfrac{2\pi}{5}$	**b)** $\dfrac{-2\pi}{5}$	**c)** $\dfrac{12\pi}{5}$

1) $\boxed{\text{b et c}}$.

2) $\boxed{\text{a et c}}$.

3) $\boxed{\text{b}}$.

4) $\boxed{\text{a}}$.

5) $\boxed{\text{a, b et c}}$.

Exercice n°21 page 244 Vrai ou faux ?

$\mathcal{C}$ est le cercle trigonométrique associé à un repère orthormé direct (O ; I, J) du plan.

On considère le point M du cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ associé au réel $\dfrac{29\pi}{7}$.

Préciser si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1) $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) = \dfrac{29\pi}{7}$ (2π).

2) Toutes les mesures en radian de $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$ sont positives.

3) $\dfrac{8\pi}{7}$ est une mesure en radian de $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$.

4) Le point de associé au réel $\dfrac{-13\pi}{7}$ est M.

5) La mesure principale en radian de $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$ est $\dfrac{\pi}{7}$.

1) $\boxed{\text{Vrai}}$.

2) $\boxed{\text{Faux}}$.

3) $\boxed{\text{Faux}}$.

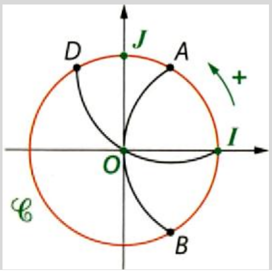
4) $\boxed{\text{Vrai}}$.

5) $\boxed{\text{Vrai}}$.

Exercice n°23 page 244 Vrai ou faux ?

$\mathscr{C}$ est le cercle trigonométrique associé à un repère orthormé direct (O ; I, J) du plan

Le cercle de centre I passant par O coupe $\mathscr{C}$ en A et B et le cercle de centre A passant par O recoupe $\mathscr{C}$ en D. Préciser si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.



1) $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}) = \frac{\pi}{4}\ (2\pi)$.

2) $(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OI}) = \frac{-2\pi}{3}\ (2\pi)$.

3) $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OD}) = \pi\ (2\pi)$.

4) $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OJ}) = \frac{5\pi}{6}\ (2\pi)$.

5) $(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OJ}) = \frac{\pi}{6}\ (2\pi)$.

1) $\boxed{\text{Faux}}$: $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}) = \frac{\pi}{3}\ (2\pi)$.

2) $\boxed{\text{Vrai}}$.

3) $\boxed{\text{Vrai}}$.

4) $\boxed{\text{Vrai}}$.

5) $\boxed{\text{Faux}}$: $(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OJ}) = \frac{-\pi}{6}\ (2\pi)$.

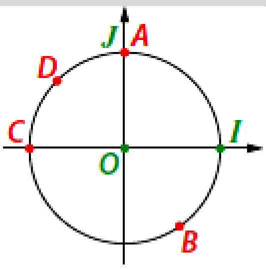
Exercice n°25 page 244

$\mathscr{C}$ est le cercle trigonométrique associé à un repère orthormé direct (O ; I, J) du plan.

Les nombres a, b, c et d sont des mesures respectives en radian des angles orientés $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA})$, $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB})$, $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OC})$ et $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OD})$.

Placer les points A, B, C et D sur le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$.

a) $a = \frac{\pi}{2}$; b) $b = \frac{-\pi}{3}$; c) $c = \pi$; d) $d = \frac{3\pi}{4}$.



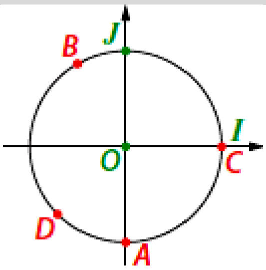
Exercice n°26 page 244

$\mathscr{C}$ est le cercle trigonométrique associé à un repère orthormé direct (O ; I, J) du plan.

Les nombres a, b, c et d sont des mesures respectives en radian des angles orientés $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA})$, $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB})$, $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OC})$ et $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OD})$.

Placer les points A, B, C et D sur le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$.

a) $a = \frac{-\pi}{2}$; b) $b = \frac{2\pi}{3}$; c) $c = 2\pi$; d) $d = \frac{-3\pi}{4}$.



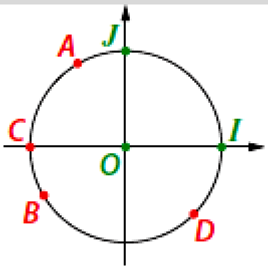
Exercice n°28 page 244

$\mathscr{C}$ est le cercle trigonométrique associé à un repère orthormé direct (O ; I, J) du plan.

Les nombres a, b, c et d sont des mesures respectives en radian des angles orientés $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA})$, $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB})$, $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OC})$ et $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OD})$.

Placer les points A, B, C et D sur le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$.

a) $a = \dfrac{50\pi}{3}$; **b)** $b = \dfrac{19\pi}{6}$; **c)** $c = 153\pi$; **d)** $d = \dfrac{-25\pi}{4}$.



Exercice n°29 page 244

$\mathcal{C}$ est le cercle trigonométrique associé à un repère orthormé direct (O ; I, J) du plan.
Les nombres a, b, c et d sont des mesures respectives en radian des angles orientés $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA})$, $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB})$, $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OC})$ et $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OD})$.
Placer les points A, B, C et D sur le cercle trigonométrique $\mathcal{C}$.
Déterminer la mesure principale en radian des angles orientés dont on donne une mesure en radian :
$\dfrac{35\pi}{2}$; $\dfrac{101\pi}{6}$; $\dfrac{-53\pi}{3}$; $\dfrac{51\pi}{4}$.

- $\dfrac{35\pi}{2} = \dfrac{-\pi + 36\pi}{2} = \dfrac{-\pi}{2} + 9 \times 2\pi$. Mesure principale : $\boxed{\dfrac{-\pi}{2}}$.
- $\dfrac{101\pi}{6} = \dfrac{5\pi + 96\pi}{6} = \dfrac{5\pi}{6} + 8 \times 2\pi$. Mesure principale : $\boxed{\dfrac{5\pi}{6}}$.
- $\dfrac{-53\pi}{3} = \dfrac{\pi - 54\pi}{3} = \dfrac{\pi}{3} - 9 \times 2\pi$. Mesure principale : $\boxed{\dfrac{\pi}{3}}$.
- $\dfrac{51\pi}{4} = \dfrac{3\pi + 48\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4} + 6 \times 2\pi$. Mesure principale : $\boxed{\dfrac{3\pi}{4}}$.

Exercice n°30 page 244

$\mathcal{C}$ est le cercle trigonométrique associé à un repère orthormé direct (O ; I, J) du plan.
Les nombres a, b, c et d sont des mesures respectives en radian des angles orientés $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA})$, $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB})$, $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OC})$ et $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OD})$.
Placer les points A, B, C et D sur le cercle trigonométrique $\mathcal{C}$.
Déterminer la mesure principale en radian des angles orientés dont on donne une mesure en radian :
$\dfrac{170\pi}{3}$; $\dfrac{81\pi}{12}$; $\dfrac{93\pi}{5}$; $\dfrac{-75\pi}{10}$.

- $\dfrac{170\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3} + 28 \times 2\pi$. Mesure principale : $\boxed{\dfrac{2\pi}{3}}$.
- $\dfrac{81\pi}{12} = \dfrac{27\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4} + 3 \times 2\pi$. Mesure principale : $\boxed{\dfrac{3\pi}{4}}$.
- $\dfrac{93\pi}{5} = \dfrac{3\pi}{5} + 9 \times 2\pi$. Mesure principale : $\boxed{\dfrac{3\pi}{5}}$.
- $\dfrac{-75\pi}{10} = \dfrac{-15\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2} - 4 \times 2\pi$. Mesure principale : $\boxed{\dfrac{\pi}{2}}$.

Exercice n°31 page 244

$\mathcal{C}$ est le cercle trigonométrique associé à un repère orthormé direct (O ; I, J) du plan.
Déterminer la mesure principale en radian des angles dont on donne une mesure en degré : 200° ; 170° ; 10° ; 70°.

- $200° = 200 \times \dfrac{\pi}{180} = \dfrac{10\pi}{9} = \dfrac{-8\pi}{9} + 1 \times 2\pi$. Mesure principale : $\boxed{\dfrac{-8\pi}{9}}$.
- $170° = 170 \times \dfrac{\pi}{180} = \dfrac{17\pi}{18}$. Mesure principale : $\boxed{\dfrac{17\pi}{18}}$.
- $10° = 10 \times \dfrac{\pi}{180} = \dfrac{\pi}{18}$. Mesure principale : $\boxed{\dfrac{\pi}{18}}$.

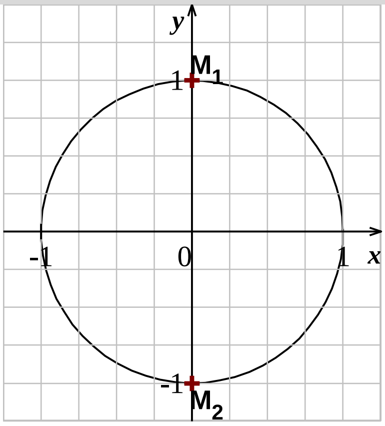
- $70° = 70 \times \frac{\pi}{180} = \frac{7\pi}{18}$. Mesure principale : $\boxed{\frac{7\pi}{18}}$.

Exercice n°33 page 245

$\mathscr{C}$ est le cercle trigonométrique associé à un repère orthormé direct (O ; I, J) du plan.

Placer sur le cercle trigonométrique les points M définis par : $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) = \frac{\pi}{2} + k \times \pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Si on appelle M_1 le point repéré par le réel $\frac{\pi}{2}$, les points sont M_1 et son symétrique M_2 par rapport à O.

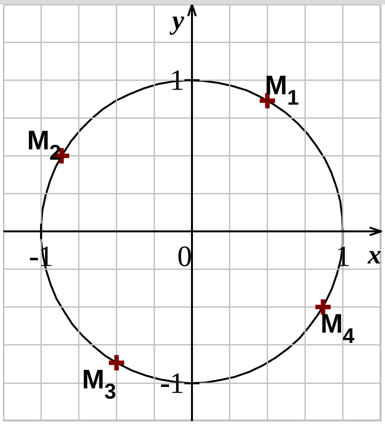


Exercice n°34 page 245

$\mathscr{C}$ est le cercle trigonométrique associé à un repère orthormé direct (O ; I, J) du plan.

Placer sur le cercle trigonométrique les points M définis par : $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) = \frac{\pi}{3} + k \times \frac{\pi}{2}$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

À partir du point M_1 associé au réel $\frac{\pi}{3}$ (que l'on construit en faisant un triangle équilatéral avec [OI] dans le sens direct), on construit un carré $M_1M_2M_3M_4$.



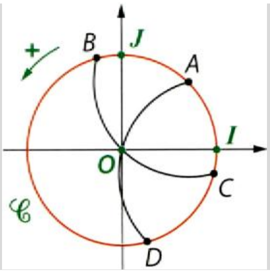
Exercice n°37 page 245

$\mathscr{C}$ est le cercle trigonométrique associé à un repère orthormé direct (O ; I, J) du plan.

On a placé sur le cercle trigonométrique le point A défini par $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}) = \frac{\pi}{4}\ (2\pi)$. L'arc de cercle de centre A passant par O coupe le cercle $\mathscr{C}$ en B et C et l'arc de cercle de centre C passant par O recoupe $\mathscr{C}$ en D.

Calculer la mesure principale en radian des angles orientés suivants :

a) $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$; **b)** $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OI})$; **c)** $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OC})$; **d)** $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD})$; **e)** $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OD})$.



Par construction, les triangles OAB, OAC et OCD sont équilatéraux.

a) $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \boxed{\frac{\pi}{3}}$.

b) $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OI}) = \frac{-\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \boxed{\frac{-7\pi}{12}}$.

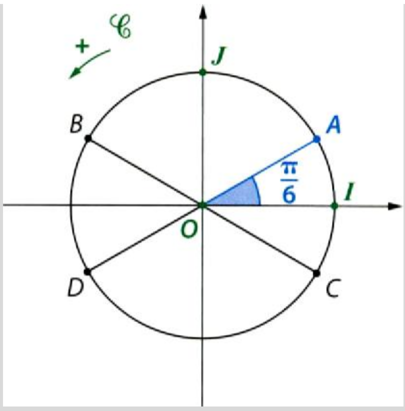
c) $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OC}) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} = \boxed{\frac{-\pi}{12}}$.

d) $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD}) = \boxed{\frac{-2\pi}{3}}$.

e) $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OD}) = \frac{-\pi}{12} - \frac{\pi}{3} = \frac{-5\pi}{12}$.

Activité n°2 page 231 : Cosinus et sinus d'angles « associés »

Sur le cercle trigonométrique, on a placé le point A associé au réel $\frac{\pi}{6}$.



Le point B est le symétrique de A par rapport à l'axe (OJ).
Le point C est le symétrique de A par rapport à l'axe (OI).
Le point D est le symétrique de A par rapport au point O.

1) Déterminer le réel positif compris entre 0 et π associé au point B.
Comparer les valeurs de $\cos\frac{5\pi}{6}$ et $\cos\frac{\pi}{6}$, puis de $\sin\frac{5\pi}{6}$ et $\sin\frac{\pi}{6}$.

2) Montrer que le point D est associé au réel $\frac{7\pi}{6}$.
Exprimer le cosinus et le sinus de $\frac{7\pi}{6}$ en fonction de $\cos\frac{\pi}{6}$ et de $\sin\frac{\pi}{6}$.

3) Démontrer que $\cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6}$ et $\sin\left(\frac{-\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6}$.

1) Le point B est associé au réel $\pi - \frac{\pi}{6} = \boxed{\frac{5\pi}{6}}$ grâce à la symétrie d'axe (OJ).

$\boxed{\cos\frac{5\pi}{6} = -\cos\frac{\pi}{6}}$; $\boxed{\sin\frac{5\pi}{6} = \sin\frac{\pi}{6}}$.

2) Le point D est associé au réel $\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{7\pi}{6}$ grâce à la symétrie de centre O.

$\cos\frac{7\pi}{6} = \boxed{-\cos\frac{\pi}{6}}$; $\sin\frac{7\pi}{6} = \boxed{-\sin\frac{\pi}{6}}$.

3) Les points A et C sont symétriques par rapport à (OI), donc ils ont une même abscisse et des ordonnées opposées, d'où les résultats.

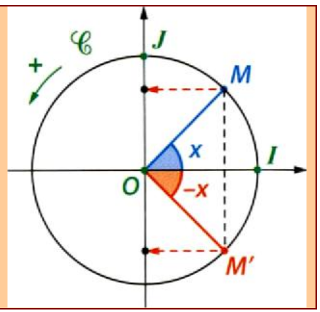
2 Cosinus et sinus d'angles « associés »

Définition 3

Dans le plan orienté, si x est une mesure en radian de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$, alors on pose : $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \cos x$ et $\sin(\vec{u}, \vec{v}) = \sin x$.
On dit que **deux angles orientés sont « associés »** s'ils admettent des cosinus ou des sinus égaux ou opposés.

Propriétés 1

Pour tout réel x :
$\mathbf{\cos(-x) = \cos x}$; $\mathbf{\sin(-x) = -\sin x}$.

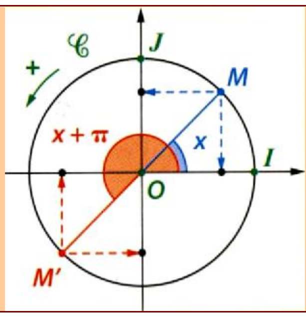


Démonstration :

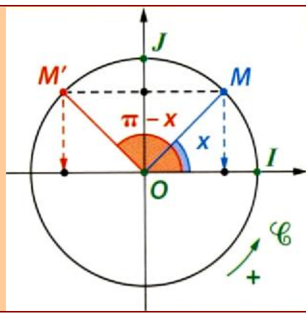
Soit M le point du cercle trigonométrique associé au réel x.
Le point M′ associé au réel $(-x)$ est le symétrique de M par rapport à l'axe (OI). Donc M et M′ ont la même abscisse et des ordonnées opposées, d'où les égalités ci-dessus.

Propriétés 2

Pour tout réel x :
$\cos(\pi + x) = -\cos x$;
$\sin(\pi + x) = -\sin x$.



Pour tout réel x :
$\cos(\pi - x) = -\cos x$;
$\sin(\pi - x) = \sin x$.



Démonstration :

Voir la démonstration à l'exercice 54, page 247.

Exemples :

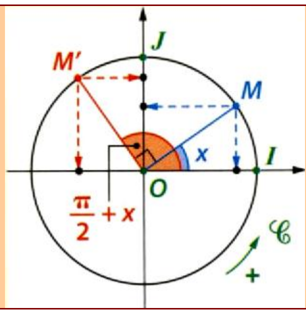
- $\sin \frac{3\pi}{4} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
- $\cos \frac{4\pi}{3} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos \frac{\pi}{3} = \frac{-1}{2}$

PROPRIÉTÉS 3

Pour tout réel x :

$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$;

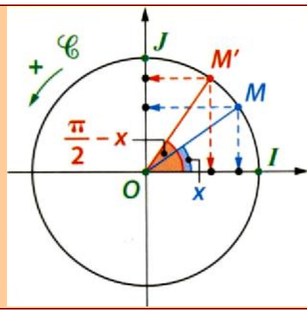
$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$.



Pour tout réel x :

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$;

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$.



Démonstration :

Voir la démonstration à l'exercice 66, page 248.

Exemple :

$\cos \frac{2\pi}{3} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin \frac{\pi}{6} = \frac{-1}{2}$

mais aussi :

$\cos \frac{2\pi}{3} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos \frac{\pi}{3} = \frac{-1}{2}$.

Exercice corrigé : ***Calculer des cosinus et sinus particuliers***

On rappelle ci-contre le tableau de valeurs vu en Seconde.
En déduire les valeurs exactes des sinus et cosinus des réels suivants :
$\mathbf{\frac{17\pi}{4}}$, $\mathbf{\frac{14\pi}{3}}$, $\mathbf{\frac{19\pi}{6}}$ **et** $\mathbf{\frac{-21\pi}{2}}$.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
cos x	$\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2} = 0$
sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Solution :

- $\frac{17\pi}{4} = \frac{16\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = 2 \times 2\pi + \frac{\pi}{4}$, donc : $\begin{cases} \cos \frac{17\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \frac{17\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$.

- $\frac{14\pi}{3} = \frac{12\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = 2 \times 2\pi + \pi - \frac{\pi}{3}$,

  donc : $\begin{cases} \cos \frac{14\pi}{3} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos \frac{\pi}{3} = \frac{-1}{2} \\ \sin \frac{14\pi}{3} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$.

- $\frac{19\pi}{6} = \frac{18\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = 3\pi + \frac{\pi}{6} = 2\pi + \pi + \frac{\pi}{6}$,

  donc $\begin{cases} \cos \frac{19\pi}{6} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\cos \frac{\pi}{6} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \sin \frac{19\pi}{6} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin \frac{\pi}{6} = \frac{-1}{2} \end{cases}$.

- $\frac{-21\pi}{2} = \frac{-20\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -5 \times 2\pi - \frac{\pi}{2}$, donc $\begin{cases} \cos \frac{-21\pi}{2} = \cos \frac{-\pi}{2} = \cos \frac{\pi}{2} = 0 \\ \sin \frac{-21\pi}{2} = \sin \frac{-\pi}{2} = -\sin \frac{\pi}{2} = -1 \end{cases}$

Méthode :

Pour k entier et x réel,
$\cos(x + k \times 2\pi) \cos x$
et $\sin(x + k \times 2\pi) = \sin x$.

Pour x réel,
$\cos(\pi - x) = \cos x$
et $\sin(\pi - x) = \sin x$.

Pour x réel,
$\cos(\pi + x) = -\cos x$
et $\sin(\pi + x) = -\sin x$.

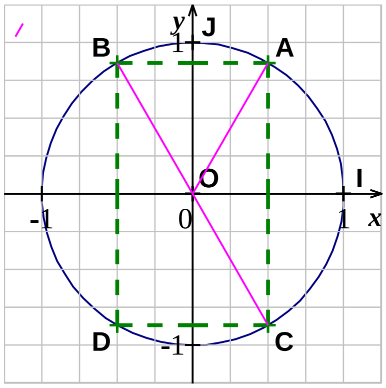
Pour x réel,
$\cos(-x) = \cos x$
et $\sin(-x) = \sin x$.

Exercice n°4 page 235

Reproduire le tableau ci-dessous et le compléter par des valeurs exactes :

x	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{-\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{-8\pi}{3}$	$\frac{17\pi}{3}$	$\frac{-28\pi}{3}$
cos x							
sin x							

$\frac{17\pi}{3} = \frac{18\pi - \pi}{3} = 3 \times 2\pi - \frac{\pi}{3}$. $\quad \frac{-28\pi}{3} = \frac{-30\pi + 2\pi}{3} = -5 \times 2\pi + \frac{2\pi}{3}$



x	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{-\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{-8\pi}{3}$	$\frac{17\pi}{3}$	$\frac{-28\pi}{3}$
Point de la figure	A	B	C	C	D	C	B
Mesure principale	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{-\pi}{3}$	$\frac{-2\pi}{3}$	$\frac{-2\pi}{3}$	$\frac{-\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$
cos x	$\boxed{\frac{1}{2}}$	$\boxed{\frac{-1}{2}}$	$\boxed{\frac{1}{2}}$	$\boxed{\frac{-1}{2}}$	$\boxed{\frac{-1}{2}}$	$\boxed{\frac{1}{2}}$	$\boxed{\frac{-1}{2}}$
sin x	$\boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$	$\boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$	$\boxed{\frac{-\sqrt{3}}{2}}$	$\boxed{\frac{-\sqrt{3}}{2}}$	$\boxed{\frac{-\sqrt{3}}{2}}$	$\boxed{\frac{-\sqrt{3}}{2}}$	$\boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

Exercice n°5 page 235

Déterminer les valeurs exactes de $\sin \frac{31\pi}{6}$ et $\cos \frac{31\pi}{6}$.

$$\sin \frac{31\pi}{6} = \sin\left(\frac{36\pi - 5\pi}{6}\right) = \sin\left(6\pi - \frac{5\pi}{6}\right) = \sin \frac{-5\pi}{6} = \boxed{\frac{-1}{2}}.$$

$$\cos \frac{31\pi}{6} = \cos\left(\frac{36\pi - 5\pi}{6}\right) = \cos\left(6\pi - \frac{5\pi}{6}\right) = \cos \frac{-5\pi}{6} = \boxed{\frac{-\sqrt{3}}{2}}.$$

Exercice n°6 page 235

Reproduire le tableau ci-dessous et le compléter par des valeurs exactes :

x	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{-\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{-11\pi}{4}$	$\frac{19\pi}{4}$	$\frac{31\pi}{4}$
cos x							
sin x							

$\frac{-11\pi}{4} = \frac{-8\pi - 3\pi}{4} = -2\pi - \frac{3\pi}{4}$ $\quad \frac{19\pi}{4} = \frac{16\pi + 3\pi}{4} = 2 \times 2\pi + \frac{3\pi}{4}$ $\quad \frac{31\pi}{4} = \frac{32\pi - \pi}{4} = 4 \times 2\pi - \frac{\pi}{4}$

x	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{-\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{-11\pi}{4}$	$\frac{19\pi}{4}$	$\frac{31\pi}{4}$
cos x	$\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$	$\boxed{\frac{-\sqrt{2}}{2}}$	$\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$	$\boxed{\frac{-\sqrt{2}}{2}}$	$\boxed{\frac{-\sqrt{2}}{2}}$	$\boxed{\frac{-\sqrt{2}}{2}}$	$\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$
sin x	$\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$	$\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$	$\boxed{\frac{-\sqrt{2}}{2}}$	$\boxed{\frac{-\sqrt{2}}{2}}$	$\boxed{\frac{-\sqrt{2}}{2}}$	$\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$	$\boxed{\frac{-\sqrt{2}}{2}}$

Exercice n°7 page 235

On donne $\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$.

En déduire $\sin \frac{2\pi}{5}$, $\cos \frac{3\pi}{5}$, $\sin \frac{3\pi}{5}$, $\cos \frac{\pi}{10}$ et $\sin \frac{\pi}{10}$.

Rappel : Pour tout réel x, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

- $\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \sin^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) = 1$, donc :

$$\sin^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) = 1 - \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{4}\right)^2 = 1 - \frac{6 - 2\sqrt{5}}{16} = 1 - \frac{3 - \sqrt{5}}{8} = \frac{8 - \left(3 - \sqrt{5}\right)}{8} = \boxed{\frac{5 + \sqrt{5}}{8}}.$$

Comme $\frac{2\pi}{5} \in [0 ; \pi]$, on a $\sin \frac{2\pi}{5} > 0$. Donc : $\sin \frac{2\pi}{5} = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{8}} = \boxed{\frac{\sqrt{5 + \sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}}$.

- $\cos\dfrac{3\pi}{5} = \cos\left(\pi - \dfrac{2\pi}{5}\right) = -\cos\dfrac{2\pi}{5} = \boxed{\dfrac{1-\sqrt{5}}{4}}$.
- $\sin\dfrac{3\pi}{5} = \sin\left(\pi - \dfrac{2\pi}{5}\right) = \sin\dfrac{2\pi}{5} = \boxed{\dfrac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}}$.
- $\cos\dfrac{\pi}{10} = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{2\pi}{5}\right) = \sin\dfrac{2\pi}{5} = \boxed{\dfrac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}}$.
- $\sin\dfrac{\pi}{10} = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{2\pi}{5}\right) = \cos\dfrac{2\pi}{5} = \boxed{\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}}$.

Exercice n°42 page 245 Q.C.M.

Pour chacune des affirmations suivantes, préciser **la seule** réponse correcte.

1) $\cos(\pi + x) + \cos(-x)$ est égal à :
a) 0. **b)** $2\cos x$. **c)** $-2\cos x$.

2) $\cos(\pi + x) + \cos(\pi - x)$ est égal à :
a) 0. **b)** $2\cos x$. **c)** $-2\cos x$.

3) $\sin(\pi - x) - \sin(\pi + x)$ est égal à :
a) 0. **b)** $2\sin x$. **c)** $-2\sin x$.

4) $\sin(-x) - \sin(\pi - x)$ est égal à :
a) 0. **b)** $2\sin x$. **c)** $-2\sin x$.

1) Réponse $\boxed{\text{a}}$: $\cos(\pi + x) + \cos(-x) = -\cos x + \cos x = 0$.

2) Réponse $\boxed{\text{c}}$: $\cos(\pi + x) + \cos(\pi - x) = -\cos x - \cos x = -2\cos x$.

3) Réponse $\boxed{\text{b}}$: $\sin(\pi - x) - \sin(\pi + x) = \sin x + \sin x = 2\sin x$.

4) Réponse $\boxed{\text{c}}$: $\sin(-x) - \sin(\pi - x) = -\sin x - \sin x = -2\sin x$.

Exercice n°44 page 246 Q.C.M.

Pour chacune des affirmations suivantes, préciser **l'unique** bonne réponse.

On donne $\cos\alpha = \dfrac{-3}{5}$ et $\alpha \in \left[-\pi\,,\dfrac{-\pi}{2}\right]$.

1) Le sinus de α vaut :
a) $\dfrac{2}{5}$; **b)** $\dfrac{-2}{5}$; **c)** $\dfrac{4}{5}$; **d)** $\dfrac{-4}{5}$;

2) Le sinus de $\pi + \alpha$ vaut :
a) $\dfrac{2}{5}$; **b)** $\dfrac{-2}{5}$; **c)** $\dfrac{4}{5}$; **d)** $\dfrac{-4}{5}$;

3) Le sinus de $\pi - \alpha$ vaut :
a) $\dfrac{2}{5}$; **b)** $\dfrac{-2}{5}$; **c)** $\dfrac{4}{5}$; **d)** $\dfrac{-4}{5}$;

4) Le sinus de $\dfrac{\pi}{2} + \alpha$ vaut :
a) $\dfrac{3}{5}$; **b)** $\dfrac{-3}{5}$; **c)** $\dfrac{4}{5}$; **d)** $\dfrac{-4}{5}$;

1) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, d'où $\sin^2\alpha = 1 - \left(\dfrac{-3}{5}\right)^2 = 1 - \dfrac{9}{25} = \dfrac{16}{25}$.

Or $\alpha \in \left[-\pi\,,\dfrac{-\pi}{2}\right]$, donc $\sin\alpha \leq 0$, d'où $\sin\alpha = \dfrac{-4}{5}$.

Réponse $\boxed{\text{d}}$.

2) Réponse $\boxed{\text{c}}$: $\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha = \dfrac{4}{5}$.

3) Réponse $\boxed{\text{d}}$: $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha = \dfrac{-4}{5}$.

4) Réponse $\boxed{\text{b}}$: $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha = \dfrac{-3}{5}$.

Exercice n°45 page 246 LOGIQUE Vrai ou faux ?

Préciser si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1) Si $\cos x = \frac{1}{2}$, alors $x = \frac{\pi}{3}$.

2) Si $\cos x = \frac{1}{2}$, alors $x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = \frac{-\pi}{3}$.

3) Si $x = \frac{\pi}{3}$, alors $\cos x = \frac{1}{2}$.

4) Si $x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = \frac{-\pi}{3}$, alors $\cos x = \frac{1}{2}$.

5) Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\cos\left(\frac{\pi}{3} + k \times 2\pi\right) = \frac{1}{2}$.

6) Si $\cos x = \frac{1}{2}$, alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = \frac{\pi}{3} + k \times 2\pi$ ou $x = \frac{-\pi}{3} + k \times 2\pi$.

1) $\boxed{\text{Faux}}$: $\cos \frac{-\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

2) $\boxed{\text{Faux}}$: $\cos \frac{7\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

3) $\boxed{\text{Vrai}}$: $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

4) $\boxed{\text{Vrai}}$: $\cos \frac{\pi}{3} = \cos \frac{-\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

5) $\boxed{\text{Vrai}}$: $\cos\left(\frac{\pi}{3} + k \times 2\pi\right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

6) $\boxed{\text{Vrai}}$.

Exercice n°46 page 246

Dans chacun des cas suivants, M est un point du cercle trigonométrique associé au repère orthonormé direct (O ; I, J). Déterminer les mesures en radian de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$ connaissant les coordonnées de M dans le repère (O ; I, J).

1) $M\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$. **2)** $M\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$. **3)** $M\left(\frac{-1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$. **4)** $M(0\,;-1)$.

1) $\boxed{\frac{5\pi}{6} + k \times 2\pi}$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

2) $\boxed{\frac{-\pi}{4} + k \times 2\pi}$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

3) $\boxed{\frac{-2\pi}{3} + k \times 2\pi}$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

4) $\boxed{\frac{-\pi}{2} + k \times 2\pi}$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice n°49 page 246

Simplifier les expressions suivantes où x désigne un réel quelconque :

a) $A = \sin(\pi - x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$;

b) $B = \sin(\pi + x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin(-x)$;

c) $C = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$;

d) $D = \sin(\pi + x) + \cos(\pi + x) - \sin(-x)$;

e) $E = 2\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos(-x)$.

a) $A = \sin(\pi - x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin x - \sin x = \boxed{0}$.

b) $B = \sin(\pi + x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin(-x) = -\sin x + \sin x - \sin x = \boxed{-\sin x}$.

c) $C = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x + \cos x = \boxed{2\cos x}$.

d) $D = \sin(\pi + x) + \cos(\pi + x) - \sin(-x) = -\sin x - \cos x + \sin x = \boxed{-\cos x}$.

e) $E = 2\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos(-x) = 2\cos x + \cos x - \cos x = \boxed{2\cos x}$.

Exercice n°20 page 243 Vrai ou faux ?

Préciser si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1) Un angle orienté a une infinité de mesures en radian.
2) Certains angles orientés ont toutes leurs mesures négatives.
3) Les mesures de l'angle nul sont les réels $k \times 2\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.
4) Les mesures de l'angle plat sont les réels $k \times \pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.
5) Pour tout réel x, $\cos(\pi + x) \leq 0$.
6) Pour tout réel x, $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$.
7) Pour tout réel x, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$.
8) Pour tout réel x, $\sin(-x) = \sin(\pi + x)$.

1) $\boxed{\text{Vrai}}$.
2) $\boxed{\text{Faux}}$.
3) $\boxed{\text{Vrai}}$.
4) $\boxed{\text{Faux}}$, c'est $\pi + k \times 2\pi$.
5) $\boxed{\text{Faux}}$.
6) $\boxed{\text{Vrai}}$.
7) $\boxed{\text{Faux}}$: $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$.
8) $\boxed{\text{Vrai}}$.

Exercice n°40 page 245 Vrai ou faux ?

Préciser si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1) Les réels $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{3\pi}{4}$ ont le même sinus.
2) Les réels $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{4\pi}{3}$ ont le même sinus.
3) Les réels $\frac{\pi}{5}$ et $\frac{21\pi}{5}$ ont des sinus opposés.
4) Les réels $\frac{\pi}{7}$ et $\frac{-\pi}{7}$ ont des sinus opposés.

1) $\boxed{\text{Vrai}}$: $\frac{3\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4}$.
2) $\boxed{\text{Faux}}$: $\sin\frac{4\pi}{3} = \sin\left(\frac{\pi}{3} + \pi\right) = -\sin\frac{\pi}{3}$.
3) $\boxed{\text{Faux}}$: $\sin\frac{21\pi}{5} = \sin\left(\frac{\pi}{5} + 2 \times 2\pi\right) = \sin\frac{\pi}{5}$.
4) $\boxed{\text{Vrai}}$.

Exercice n°48 page 246

Dans chacun des cas suivants, M est un point du cercle trigonométrique associé au repère orthonormé direct (O ; I, J).
On note α une mesure en radian de l'angle $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$.
Déterminer dans chaque cas les coordonnées de M dans le repère (O ; I, J) ainsi que les valeurs possibles de α.

1) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\alpha < 0$. **2)** $\sin\alpha = \frac{-1}{2}$ et $\cos\alpha < 0$. **3)** $\cos\alpha = -1$. **4)** $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\cos\alpha < 0$.

Dans tout l'exercice, on note k un entier relatif.

1) $\alpha = \boxed{\frac{-\pi}{6} + k \times 2\pi}$, donc $M\boxed{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{-1}{2}\right)}$.
2) $\alpha = \boxed{\frac{-5\pi}{6} + k \times 2\pi}$ donc $M\boxed{\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1}{2}\right)}$.
3) $\alpha = \boxed{\pi + k \times 2\pi}$, donc $M\boxed{(-1, 0)}$.
4) $\alpha = \boxed{\frac{2\pi}{3} + k \times 2\pi}$, donc $M\boxed{\left(\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$.

Exercice n°50 page 246

Calculer en utilisant des angles associés et sans calculatrice :

a) $A = \sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{3\pi}{4} + \sin\frac{5\pi}{4} + \sin\frac{7\pi}{4}$;

b) $B = \cos\frac{\pi}{3} - \cos\frac{2\pi}{3} + \cos\frac{4\pi}{3} - \cos\frac{5\pi}{3}$;

c) $C = \sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{7\pi}{6} + \cos\left(\frac{-\pi}{6}\right)$.

a) $A = \sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{3\pi}{4} + \sin\frac{5\pi}{4} + \sin\frac{7\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4} = \boxed{0}$.

b) $B = \cos\frac{\pi}{3} - \cos\frac{2\pi}{3} + \cos\frac{4\pi}{3} - \cos\frac{5\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{3} = \boxed{0}$.

c) $C = \sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{7\pi}{6} + \cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{6} = \boxed{\frac{1}{2}}$.

Exercice n°52 page 246

Un angle orienté a pour mesure en radian $\alpha + k \times 2\pi$.

On donne $\cos\alpha = \frac{1}{3}$ et $\alpha \in \left[0\,,\frac{\pi}{2}\right]$.

Calculer les réels suivants :

a) $\sin\alpha$; **b)** $\sin(\pi + \alpha)$; **c)** $\sin(\pi - \alpha)$.

a) $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$, donc $\sin^2\alpha = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$.

Comme $\alpha \in \left[0\,,\frac{\pi}{2}\right]$ le sinus est positif, donc $\sin\alpha = \sqrt{\frac{8}{9}} = \boxed{\frac{2\sqrt{2}}{3}}$.

b) $\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha = \boxed{\frac{-2\sqrt{2}}{3}}$.

c) $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha = \boxed{\frac{2\sqrt{2}}{3}}$.

Exercice n°55 page 247

Recopier et compléter le tableau suivant par des valeurs exactes :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	π
tan x					

$\tan 0 = \frac{\sin 0}{\cos 0} = \frac{0}{1} = 0$

$\tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\tan\frac{\pi}{4} = \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{2}{\sqrt{2}} = 1$

$\tan\frac{\pi}{3} = \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = \sqrt{3}$

$\tan\pi = \frac{\sin\pi}{\cos\pi} = \frac{0}{-1} = 0$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	π
tan x	$\boxed{0}$	$\boxed{\frac{\sqrt{3}}{3}}$	$\boxed{1}$	$\boxed{\sqrt{3}}$	$\boxed{0}$

Exercice n°56 page 247

x désigne un réel tel que $\cos x \neq 0$. Exprimer en fonction de $\tan x$ les réels suivants :

$\tan(-x)$; $\tan(\pi - x)$; $\tan(\pi + x)$.

- $\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = \boxed{-\tan x}$.
- $\tan(\pi - x) = \frac{\sin(\pi - x)}{\cos(\pi - x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = \boxed{-\tan x}$.
- $\tan(\pi + x) = \frac{\sin(\pi + x)}{\cos(\pi + x)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \boxed{\tan x}$.

Exercice n°58 page 247

On donne $\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$.

En déduire les valeurs exactes de :

a) $\cos\frac{7\pi}{5}$ et $\cos\left(\frac{-2\pi}{5}\right)$; **b)** $\sin\frac{7\pi}{5}$ et $\sin\left(\frac{-2\pi}{5}\right)$; **c)** $\tan\frac{7\pi}{5}$ et $\tan\left(\frac{-2\pi}{5}\right)$.

a)

- $\cos\frac{7\pi}{5} = \cos\left(\pi + \frac{2\pi}{5}\right) = -\cos\frac{2\pi}{5} = \boxed{\frac{1-\sqrt{5}}{4}}$.
- $\cos\left(\frac{-2\pi}{5}\right) = \cos\frac{2\pi}{5} = \boxed{\frac{\sqrt{5}-1}{4}}$.

b)

- $\sin^2\frac{7\pi}{5} = 1 - \cos^2\frac{7\pi}{5} = \frac{10+2\sqrt{5}}{16} = \frac{5+\sqrt{5}}{8}$.

  Or $\sin\frac{7\pi}{5} < 0$, donc $\sin\frac{7\pi}{5} = -\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}} = \frac{-\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} = \boxed{\frac{-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}}$.
- $\sin\left(\frac{-2\pi}{5}\right) = -\sin\frac{2\pi}{5} = -\sin\left(\frac{7\pi}{5} - \pi\right) = \sin\frac{7\pi}{5} = \boxed{\frac{-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}}$.

c)

- $\tan\frac{7\pi}{5} = \frac{\sin\frac{7\pi}{5}}{\cos\frac{7\pi}{5}} = \frac{-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \times \frac{4}{1-\sqrt{5}} = \frac{-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{1-\sqrt{5}} = \boxed{\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1}}$.
- $\tan\left(\frac{-2\pi}{5}\right) = \frac{\sin\left(\frac{-2\pi}{5}\right)}{\cos\left(\frac{-2\pi}{5}\right)} = \frac{-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \times \frac{4}{\sqrt{5}-1} = \boxed{\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{1-\sqrt{5}}}$.

3 PROPRIÉTÉS DES ANGLES ORIENTÉS DE VECTEURS

3.1 Angle nul ou plat

PROPRIÉTÉ 4

Pour tout vecteur non nul $\vec{u}$, on a :

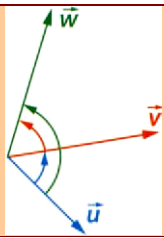
$(\vec{u}, \vec{u}) = 0\ (2\pi)$ et $(-\vec{u}, \vec{u}) = (\vec{u}, -\vec{u}) = \pi\ (2\pi)$.

3.2 Relation de Chasles

PROPRIÉTÉ 5

Étant donnés des vecteurs non nuls $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, la somme d'une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$ et d'une mesure de l'angle orienté $(\vec{v}, \vec{w})$ est une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{w})$.

On écrit : $(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{w})\ (2\pi)$.



3.3 Conséquences

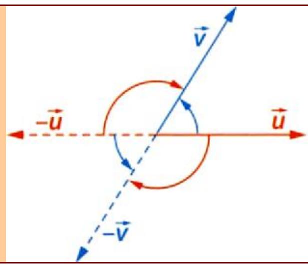
PROPRIÉTÉS 6

Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on a :

1) $(\vec{v}, \vec{u}) = -(\vec{u}, \vec{v})\quad (2\pi)$;

2) $(-\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v})\quad (2\pi)$;

3) $(-\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi\quad (2\pi)$.

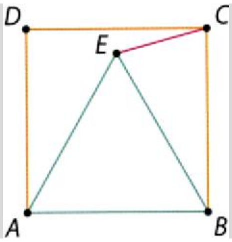


Pistes de démonstration :

- On déduit le résultat **1)** de l'égalité : $(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{u}) = (\vec{u}, \vec{u}) = 0\quad (2\pi)$.
- On a : $(-\vec{u}, -\vec{v}) = (-\vec{u}, \vec{u}) + (\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, -\vec{v})\quad (2\pi)$,
  or $(-\vec{u}, \vec{u}) = (\vec{v}, -\vec{v}) = \pi\quad (2\pi)$, d'où le résultat **2)**.
- $(-\vec{u}, \vec{v}) = (-\vec{u}, \vec{u}) + (\vec{u}, \vec{v})\quad (2\pi)$ et $(\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, -\vec{v})\quad (2\pi)$.

Exercice n°8 page 253 Mesures d'angles orientés

ABCD est un carré direct, ABE est un triangle équilatéral direct.



1) Calculer une mesure en radian de chacun des angles orientés suivants : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE})$; $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BE})$; $(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EC})$.
2) Calculer une mesure en radian de chacun des angles orientés suivants : $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{EC})$; $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{EC})$; $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{BE})$.

Les mesures suivantes sont modulo 2π.

1)
- Comme ABE est équilatéral, alors $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}) = \boxed{\frac{\pi}{3}}$.
- $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BE}) = (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BE}) = \frac{\pi}{2} + \frac{-\pi}{3} = \boxed{\frac{\pi}{6}}$.
- Comme BCE est isocèle en B, alors $\widehat{BEC} = \widehat{BCE} = \frac{\pi - \widehat{CBE}}{2} = \frac{\pi - \frac{\pi}{6}}{2} = \frac{5\pi}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{5\pi}{12}$.

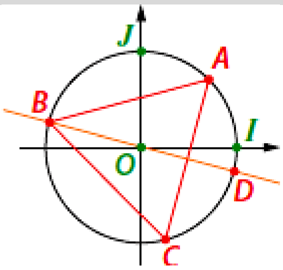
  D'où $(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EC}) = (\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EB}) + (\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{EC}) = \frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{12} = \frac{4\pi}{12} + \frac{5\pi}{12} = \frac{9\pi}{12} = \boxed{\frac{3\pi}{4}}$.

2)
- $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{EC}) = (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{EC}) = (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CE}) = \boxed{\frac{-5\pi}{12}}$.
- $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{EC}) = (\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CE}) = (\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CE}) = \frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{12} = \boxed{\frac{\pi}{12}}$.
- $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{BE}) = (\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EB}) = \boxed{\frac{\pi}{3}}$.

Exercice n°38 page 245

1) $\mathcal{C}$ est le cercle trigonométrique associé à un repère orthormé direct (O ; I, J) du plan.
Construire sur le cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ le triangle équilatéral ABC de sens direct, le point A étant tel que $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}) = \frac{\pi}{4}\ (2\pi)$.
La hauteur issue de B recoupe $\mathcal{C}$ en D.
2) Calculer une mesure en radian de chacun des angles orientés suivants : **a)** $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB})$; **b)** $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD})$.

1)



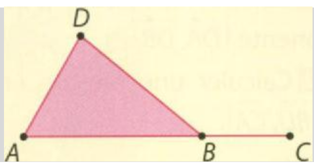
2)
a) Les triangles OAB, OBC et OCA sont isocèles en O et on a : $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) = (\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}) = \frac{2\pi}{3}$.

D'où $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} = \frac{3\pi}{12} + \frac{8\pi}{12} = \boxed{\frac{11\pi}{12}}$.

b) $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}) = (\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD}) = \frac{2\pi}{3} + \frac{-\pi}{3} = \boxed{\frac{\pi}{3}}$.

Exercice n°60 page 247 Vrai ou faux ?

ABD est un triangle direct et A, B, C sont alignés dans cet ordre.



1) $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \pi\ (2\pi)$.
2) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA})\ (2\pi)$.
3) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = -(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{DA})\ (2\pi)$.
4) $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BD}) = \pi - (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD})\ (2\pi)$.
5) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) = \pi\ (2\pi)$.

1) $\boxed{\text{Vrai}}$.

2) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA})$. $\boxed{\text{Vrai}}$.

3) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{DA})$. $\boxed{\text{Faux}}$.

4) $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BD}) = (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}) = \pi + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD})$. $\boxed{\text{Faux}}$.

5) La somme des angles d'un triangle égale π. $\boxed{\text{Vrai}}$.

Exercice n°61 page 247 Vrai ou faux ?

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls.

1) $(\vec{u}, \vec{v}) = (-\vec{v}, -\vec{u}) \quad (2\pi)$.

2) $(\vec{u}, -\vec{v}) = (-\vec{u}, \vec{v}) \quad (2\pi)$.

3) $(\vec{u}, \vec{v}) - \pi = (\vec{u}, -\vec{v}) \quad (2\pi)$.

4) $(\vec{u}, -\vec{v}) = \pi + (-\vec{u}, -\vec{v}) \quad (2\pi)$.

1) $(\vec{u}, \vec{v}) = (-\vec{u}, -\vec{v}) = -(-\vec{v}, -\vec{u})$. $\boxed{\text{Faux}}$.

2) $\boxed{\text{Vrai}}$, d'après le cours $(\vec{u}, \vec{v}) = (-\vec{u}, -\vec{v}) \quad (2\pi)$.

3) $(\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) - \pi$. $\boxed{\text{Vrai}}$.

4) $(\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, -\vec{u}) + (-\vec{u}, -\vec{v}) = \pi + (-\vec{u}, -\vec{v})$. $\boxed{\text{Vrai}}$.

Exercice n°62 page 247 Q.C.M.

A et B sont deux points distincts.
Préciser **la seule** réponse correcte.

1) L'ensemble des points M du plan tels que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = 0 \ (2\pi)$ est :
- **a)** La droite (AB) privée du segment [AB].
- **b)** La droite (AB) privée des deux points A et B.
- **c)** Le segment [AB] privé des deux points A et B.

2) L'ensemble des points M du plan tels que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = k \times \pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ est : mêmes propositions qu'à la question **1)**.

3) L'ensemble des points M du plan tels que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{BM}) = 0 \ (2\pi)$ est : mêmes propositions qu'à la question **1)**.

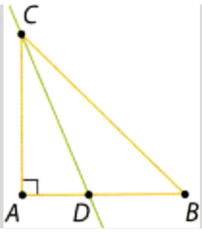
1) Réponse $\boxed{\text{a}}$.

2) Réponse $\boxed{\text{b}}$.

3) Réponse $\boxed{\text{c}}$.

Exercice n°63 page 247

ABC est un triangle rectangle et isocèle en A tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2} \ (2\pi)$.



La bissectrice de l'angle $\widehat{ACB}$ coupe le côté [AB] en D.

1) Calculer la mesure principale en radian de $(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC})$.

2) Calculer une mesure en radian de $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DC})$.

Les égalités suivantes sont modulo 2π.

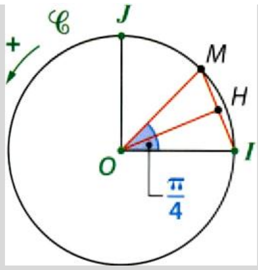
1) Comme ABC est rectangle en A et isocèle, on a : $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{4}$.

Donc $(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CB}) = \frac{\pi}{8}$ grâce à la bissectrice, donc : $(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}) = \pi - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8}\right) = \boxed{\frac{5\pi}{8}}$.

2) $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DC}) = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD}) = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{4} = \boxed{\frac{\pi}{8}}$.

Exercice n°84 page 250 Calcul de cos $\frac{\pi}{8}$ et sin $\frac{\pi}{8}$

$\mathcal{C}$ est le cercle trigonométrique associé à un repère orthormé direct (O ; I, J) du plan. M est le point de $\mathcal{C}$ tel que $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) = \frac{\pi}{4} \quad (2\pi)$.



1) Quelles sont les coordonnées de M dans le repère (O ; I, J) ?

2) Calculer la distance IM.

3)
- **a)** Démontrer que $IM = 2 \times \sin \frac{\pi}{8}$.
- **b)** En déduire la valeur exacte de $\sin \frac{\pi}{8}$.

4) Calculer la valeur exacte de $\cos \frac{\pi}{8}$.

5) Déduire des questions précédentes les lignes trigonométriques de : $\frac{7\pi}{8}$, $\frac{9\pi}{8}$, $\frac{5\pi}{8}$ et $\frac{3\pi}{8}$.

1) $x_M = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $y_M = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, soit $\boxed{M\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$.

2) On a I(1 ; 0) donc $IM = \sqrt{(x_I - x_M)^2 + (y_I - y_M)^2} = \sqrt{\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{2} - \sqrt{2} + \frac{1}{2}} = \boxed{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$.

3)

a) $IM = 2\,IH = 2 \times 1 \times \sin\widehat{IOH} = 2\sin\frac{\pi}{8}$.

b) $\sin\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2} IM = \boxed{\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}}$.

4) $\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1 - \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1 - \frac{2-\sqrt{2}}{4} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$.

Comme ce sinus est positif (on est dans le premier quadrant), on a $\sin\frac{\pi}{8} = \boxed{\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}$.

5) $\sin\frac{7\pi}{8} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right) = \boxed{\sin\frac{\pi}{8}}$ et $\cos\frac{7\pi}{8} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right) = \boxed{-\cos\frac{\pi}{8}}$.

$\sin\frac{9\pi}{8} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{8}\right) = \boxed{-\sin\frac{\pi}{8}}$ et $\cos\frac{9\pi}{8} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{8}\right) = \boxed{-\cos\frac{\pi}{8}}$.

$\sin\frac{5\pi}{8} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}\right) = \boxed{\cos\frac{\pi}{8}}$ et $\cos\frac{5\pi}{8} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}\right) = \boxed{-\sin\frac{\pi}{8}}$.

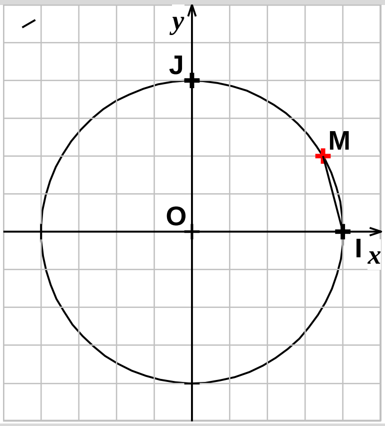
$\sin\frac{3\pi}{8} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = \boxed{\cos\frac{\pi}{8}}$ et $\cos\frac{3\pi}{8} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = \boxed{\sin\frac{\pi}{8}}$.

Exercice n°85 page 250 Calcul de cos $\frac{\pi}{12}$ et sin $\frac{\pi}{12}$

$\mathcal{C}$ est le cercle trigonométrique associé à un repère orthormé direct (O ; I, J) du plan.

M est le point de $\mathcal{C}$ tel que $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) = \frac{\pi}{6}$ (2π).

1) Quelles sont les coordonnées de M dans le repère (O ; I, J) ?



1) $x_M = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $y_M = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, soit $\boxed{M\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)}$.

2) Calculer la distance IM.

2) $IM = \sqrt{(x_I - x_M)^2 + (y_I - y_M)^2}$

$IM = \sqrt{\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(0-\frac{1}{2}\right)^2}$

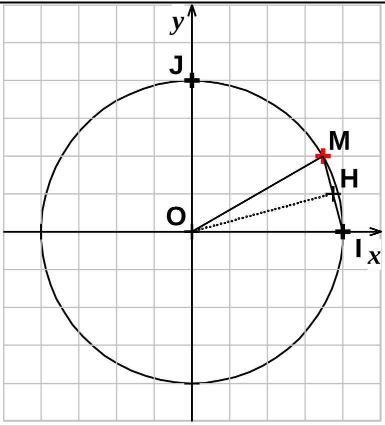
$IM = \sqrt{1 - \sqrt{3} + \frac{3}{4} + \frac{1}{4}}$

$IM = \boxed{\sqrt{2-\sqrt{3}}}$.

3)

a) Démontrer que $IM = 2 \times \sin\frac{\pi}{12}$.

b) En déduire la valeur exacte de $\sin\frac{\pi}{12}$.



3) a) Soit H le pied de la hauteur du triangle OIM issue de O.
De plus le triangle OIM est isocèle en O, alors cette hauteur est aussi la bissectrice de $\widehat{IOM}$, donc $\widehat{IOH} = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}$.

Dans le triangle rectangle OIH, on a $\sin \widehat{IOH} = \frac{IH}{OI}$, soit $\sin \frac{\pi}{12} = IH$.

Le triangle OIM est isocèle en O, alors (OH) est une médiane, donc

$IM = 2\ IH = 2 \times \sin \frac{\pi}{12}$.

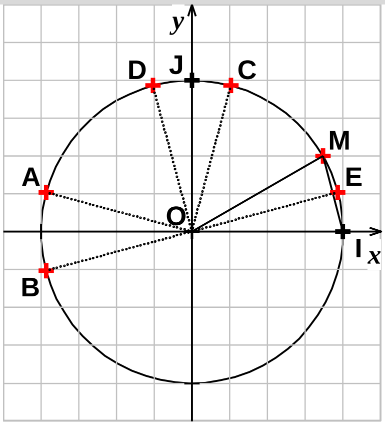
b) $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{1}{2} IM = \boxed{\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}}$.

4) Calculer la valeur exacte de $\cos \frac{\pi}{12}$.

4) $\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = 1 - \sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = 1 - \frac{2-\sqrt{3}}{4} = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$ et $\cos \frac{\pi}{12} > 0$, donc $\cos \frac{\pi}{12} = \boxed{\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}}$.

5) Déduire des questions précédentes les lignes trigonométriques de : $\frac{11\pi}{12}$, $\frac{13\pi}{12}$, $\frac{5\pi}{12}$ et $\frac{7\pi}{12}$.

5)



- $\cos \frac{11\pi}{12} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{12}\right) = -\cos \frac{\pi}{12} = \boxed{\frac{-\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}}$;

  $\sin \frac{11\pi}{12} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{12}\right) = \sin \frac{\pi}{12} = \boxed{\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}}$.
- $\cos \frac{13\pi}{12} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{12}\right) = -\cos \frac{\pi}{12} = \boxed{\frac{-\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}}$;

  $\sin \frac{13\pi}{12} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{12}\right) = -\sin \frac{\pi}{12} = \boxed{\frac{-\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}}$.
- $\cos \frac{5\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right) = \sin \frac{\pi}{12} = \boxed{\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}}$; et $\sin \frac{5\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right) = \cos \frac{\pi}{12} = \boxed{\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}}$.
- $\cos \frac{7\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12}\right) = -\sin \frac{\pi}{12} = \boxed{\frac{-\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}}$ et $\sin \frac{7\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12}\right) = \cos \frac{\pi}{12} = \boxed{\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}}$.

4 ÉQUATIONS $\cos x = \cos a$ ET $\sin x = \sin a$

PROPRIÉTÉ 7

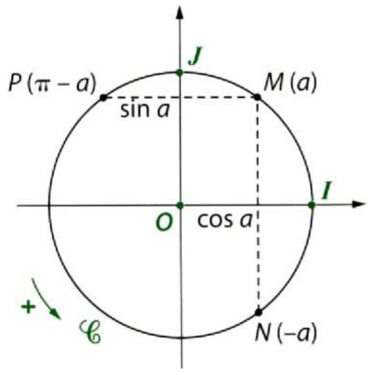
Soit a un réel donné. **Les solutions de l'équation $\cos x = \cos a$** sont les réels $\boldsymbol{a + k \times 2\pi}$ et $\boldsymbol{-a + k \times 2\pi}$, où k est un entier relatif.

PROPRIÉTÉ 8

Soit a un réel donné. **Les solutions de l'équation $\sin x = \sin a$** sont les réels $\boldsymbol{a + k \times 2\pi}$ et $\boldsymbol{\pi - a + k \times 2\pi}$, où k est un entier relatif.

Illustration :

- Si M est le point du cercle trigonométrique associé au réel a, il existe un autre point du cercle et un seul ayant même abscisse que M : c'est le symétrique N de M par rapport à l'axe des abscisses, associé au réel $-a$.
- Si M est le point du cercle trigonométrique associé au réel a, il existe un autre point du cercle et un seul ayant même ordonnée que M : c'est le symétrique P de M par rapport à l'axe des ordonnées, associé au réel $\pi - a$.



Exercice corrigé : *Résoudre une équation trigonométrique*

1) Résoudre dans ℝ l'équation suivante : $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

2)

a) Résoudre dans ℝ l'équation suivante : $\sin x = -\sin \dfrac{\pi}{4}$.

b) Quelles sont les solutions qui appartiennent à l'intervalle $]-2\pi\,;\,2\pi]$?

3) Résoudre dans $]-\pi\,;\,\pi]$ l'équation suivante : $\sin x - \cos \dfrac{\pi}{6} = 0$.

Solution :

1) $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ équivaut à : $\cos x = \cos \dfrac{\pi}{6}$, soit à : $\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + k \times 2\pi \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{-\pi}{6} + k \times 2\pi \end{cases}$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Méthode :

$\cos x = \cos a$ équivaut à : $\begin{cases} x = a + k \times 2\pi \\ \text{ou} \\ x = -a + k \times 2\pi \end{cases}$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

2) a) On se ramène à une équation du type $\sin x = \sin a$.

On a $-\sin \dfrac{\pi}{4} = \sin \left(\dfrac{-\pi}{4}\right)$ et l'équation est équivalente à $\sin x = \sin \dfrac{-\pi}{4}$.

$\sin(-x) = -\sin x$.

$\sin x = \sin a$ équivaut à : $\begin{cases} x = a + k \times 2\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - a + k \times 2\pi \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Les solutions sont : $\begin{cases} x = \dfrac{-\pi}{4} + k \times 2\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - \left(\dfrac{-\pi}{4}\right) + k \times 2\pi \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{Z}$,

ce qui est équivalent à $\begin{cases} x = \dfrac{-\pi}{4} + k \times 2\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi + \dfrac{\pi}{4} + k \times 2\pi \end{cases}$, c'est-à-dire $\begin{cases} x = \dfrac{-\pi}{4} + k \times 2\pi \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{5\pi}{4} + k \times 2\pi \end{cases}$ ou aussi $\begin{cases} x = \dfrac{-\pi}{4} + k \times 2\pi \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{-3\pi}{4} + k \times 2\pi \end{cases}$

avec $k \in \mathbb{Z}$.

b) On calcule les mesures solutions suivant les valeurs de k pour trouver toutes celles dans $]-2\pi\,;\,2\pi]$.

L'ensemble des solutions est : $S = \left\{\dfrac{-3\pi}{4}, \dfrac{-\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4}\right\}$.

k	-1	0	1	2
$\dfrac{-\pi}{4} + k \times 2\pi$	$\dfrac{-9\pi}{4}$	$\dfrac{-\pi}{4}$	$\dfrac{7\pi}{4}$	$\dfrac{15\pi}{4}$
$\dfrac{-3\pi}{4} + k \times 2\pi$	$\dfrac{-11\pi}{4}$	$\dfrac{-3\pi}{4}$	$\dfrac{5\pi}{4}$	$\dfrac{13\pi}{4}$

3) L'équation est équivalente à $\sin x = \cos \dfrac{\pi}{6}$.

On écrit $\cos \dfrac{\pi}{6}$ sous la forme d'un sinus pour se ramener à une équation du type $\sin x = \sin a$.

Par exemple, $\cos \dfrac{\pi}{6} = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{6}\right) = \sin \dfrac{\pi}{3}$.

$\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$.

On résout alors $\sin x = \sin \dfrac{\pi}{3}$.

Les solutions sont : $\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} + k \times 2\pi \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{2\pi}{3} + k \times 2\pi \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{Z}$, c'est-à-dire $\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} + k \times 2\pi \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{2\pi}{3} + k \times 2\pi \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

L'ensemble des solutions dans $]-\pi\,;\,\pi]$ est $S = \left\{\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}\right\}$.

k	-1	0	1
$\dfrac{\pi}{3} + k \times 2\pi$	$\dfrac{-5\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{7\pi}{3}$
$\dfrac{2\pi}{3} + k \times 2\pi$	$\dfrac{-4\pi}{3}$	$\dfrac{2\pi}{3}$	$\dfrac{8\pi}{3}$

Exercice n°8 page 237

Résoudre dans ℝ les équations suivantes : **a)** $\sin x = 0$; **b)** $\cos x = 0$.

Dans tout l'exercice, on note k un entier relatif.

a) $\sin x = 0$ équivaut à : $\begin{cases} x = 0 + k \times 2\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi + k \times 2\pi \end{cases}$, soit à : $x = \boxed{k\pi}$.

b) $\cos x = 0$ équivaut à : $\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + k \times 2\pi \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{-\pi}{2} + k \times 2\pi \end{cases}$, soit à : $x = \boxed{\dfrac{\pi}{2} + k\pi}$.

Exercice n°9 page 237

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : **a)** $\cos x = \cos\left(\dfrac{-\pi}{4}\right)$; **b)** $\cos x = -\cos\dfrac{\pi}{4}$.

a) $\cos x = \cos\left(\dfrac{-\pi}{4}\right)$ équivaut à : $\cos x = \cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$, soit à : $\begin{cases} x = \boxed{\dfrac{\pi}{4} + k \times 2\pi} \\ \text{ou} \\ x = \boxed{\dfrac{-\pi}{4} + k \times 2\pi} \end{cases}$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

b) $\cos x = -\cos\dfrac{\pi}{4}$ équivaut à : $\cos x = \cos\dfrac{3\pi}{4}$, soit à : $\begin{cases} x = \boxed{\dfrac{3\pi}{4} + k \times 2\pi} \\ \text{ou} \\ x = \boxed{\dfrac{-3\pi}{4} + k \times 2\pi} \end{cases}$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice n°10 page 237

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : **a)** $\sin x = \dfrac{1}{2}$; **b)** $\sin x = -\cos\dfrac{\pi}{4}$.

a) $\sin x = \dfrac{1}{2}$ équivaut à : $\sin x = \sin\dfrac{\pi}{6}$, soit à : $\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + k \times 2\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - \dfrac{\pi}{6} + k \times 2\pi \end{cases}$, ou encore à : $\begin{cases} x = \boxed{\dfrac{\pi}{6} + k \times 2\pi} \\ \text{ou} \\ x = \boxed{\dfrac{5\pi}{6} + k \times 2\pi} \end{cases}$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

b) $-\cos\dfrac{\pi}{4} = -\sin\dfrac{\pi}{4} = \sin\dfrac{-\pi}{4}$.

Donc $\sin x = -\cos\dfrac{\pi}{4}$ équivaut à : $\sin x = \sin\dfrac{-\pi}{4}$, soit à : $\begin{cases} x = \boxed{\dfrac{-\pi}{4} + k \times 2\pi} \\ \text{ou} \\ x = \boxed{\dfrac{-3\pi}{4} + k \times 2\pi} \end{cases}$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice n°6 page 252 Équations trigonométriques

Voir le **savoir-faire** page 237.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\cos x = \cos\dfrac{\pi}{4}$; **b)** $\cos x = \dfrac{-1}{2}$; **c)** $\sin x = \sin\dfrac{\pi}{6}$; **d)** $\sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Méthode :

Les solutions de l'équation $\cos x = \cos a$ sont les réels $a + k \times 2\pi$ et $-a + k \times 2\pi$, où k est un entier relatif.

Les solutions de l'équation $\sin x = \sin a$ sont les réels $a + x + k \times 2\pi$ et $\pi - a + k \times 2\pi$, où k est un entier relatif.

a) $\cos x = \cos\dfrac{\pi}{4}$ équivaut à : $\begin{cases} x = \boxed{\dfrac{\pi}{4} + k \times 2\pi} \\ \text{ou} \\ x = \boxed{\dfrac{-\pi}{4} + k \times 2\pi} \end{cases}$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

b) $\cos x = \frac{-1}{2}$ équivaut à : $\cos x = \cos \frac{2\pi}{3}$, soit à : $\begin{cases} x = \boxed{\frac{2\pi}{3} + k \times 2\pi} \\ \text{ou} \\ x = \boxed{\frac{-2\pi}{3} + k \times 2\pi} \end{cases}$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

c) $\sin x = \sin \frac{\pi}{6}$ équivaut à : $\begin{cases} x = \boxed{\frac{\pi}{6} + k \times 2\pi} \\ \text{ou} \\ x = \boxed{\frac{5\pi}{6} + k \times 2\pi} \end{cases}$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

d) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ équivaut à : $\sin x = \sin \frac{\pi}{4}$, soit à : $\begin{cases} x = \boxed{\frac{\pi}{4} + k \times 2\pi} \\ \text{ou} \\ x = \boxed{\frac{3\pi}{4} + k \times 2\pi} \end{cases}$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice n°10 page 253 Équations trigonométriques

Résoudre dans l'intervalle $]-\pi ; \pi]$ les équations suivantes :

a) $2 \cos x + 3 = 2$; **b)** $\sin^2 x - \sin x = 0$; **c)** $\cos 2x = 0$; **d)** $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$.

a) $2 \cos x + 3 = 2$ équivaut à : $\cos x = \frac{-1}{2}$, soit à : $\cos x = \cos \frac{2\pi}{3}$, ou encore à : $\begin{cases} x = \frac{2\pi}{3} + k \times 2\pi \\ \text{ou} \\ x = \frac{-2\pi}{3} + k \times 2\pi \end{cases}$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Les solutions dans $]-\pi ; \pi]$ sont : $\boxed{\frac{2\pi}{3} \text{ et } \frac{-2\pi}{3}}$.

b) $\sin^2 x - \sin x = 0$ équivaut à : $\sin x (\sin x - 1) = 0$, soit à : $\sin x = 0$ ou $\sin x = 1$.

Les solutions dans $]-\pi ; \pi]$ sont : $\boxed{\frac{\pi}{2}, 0 \text{ et } \pi}$.

c) $\cos 2x = 0$ équivaut à : $\begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} + k \times 2\pi \\ \text{ou} \\ 2x = \frac{-\pi}{2} + k \times 2\pi \end{cases}$, soit à : $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ \text{ou} \\ x = \frac{-\pi}{4} + k\pi \end{cases}$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Les solutions dans $]-\pi ; \pi]$ sont : $\boxed{\frac{\pi}{4}, \frac{-3\pi}{4}, \frac{-\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}}$.

d) $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ équivaut à : $\begin{cases} x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + k \times 2\pi \\ \text{ou} \\ x + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} + k \times 2\pi \end{cases}$, soit à : $\begin{cases} x = \frac{-\pi}{6} + k \times 2\pi \\ \text{ou} \\ x = \frac{\pi}{2} + k \times 2\pi \end{cases}$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Les solutions dans $]-\pi ; \pi]$ sont : $\boxed{\frac{-\pi}{6} \text{ et } \frac{\pi}{2}}$.

Exercice n°11 page 237

Résoudre dans $]-\pi ; \pi]$ les équations suivantes : **a)** $(\sin x + 1)(\cos x - 1) = 0$; **b)** $\cos^2 x = 1$.

Dans tout l'exercice, on note k un entier relatif.

a) $(\sin x + 1)(\cos x - 1) = 0$ équivaut à : $\begin{cases} \sin x + 1 = 0 \\ \text{ou} \\ \cos x - 1 = 0 \end{cases}$.

- $\sin x = -1$ équivaut à : $\sin x = \sin\left(\frac{-\pi}{2}\right)$, soit à : $\begin{cases} x = \frac{-\pi}{2} + k \times 2\pi \\ \text{ou} \\ x = \frac{3\pi}{2} + k \times 2\pi \end{cases}$, ou aussi à : $x = \frac{-\pi}{2} + k \times 2\pi$.
- $\cos x = 1$ équivaut à : $x = k \times 2\pi$.

Les solutions dans $]-\pi\ ;\ \pi]$ sont : $\boxed{\frac{-\pi}{2} \text{ et } 0}$.

k	-1	0	1
$\frac{-\pi}{2} + k \times 2\pi$	$\frac{-5\pi}{2}$	$\frac{-\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$
$k \times 2\pi$	-2π	0	2π

b) $\cos^2 x = 1$ équivaut à : $\cos^2 x - 1 = 0$, soit à : $\begin{cases} \cos x = 1 \\ \text{ou} \\ \cos x = -1 \end{cases}$, ou encore à : $\begin{cases} x = k \times 2\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi + k \times 2\pi \end{cases}$, ou aussi : $x = k\pi$.

Les solutions dans $]-\pi\ ;\ \pi]$ sont : $\boxed{0 \text{ et } \pi}$.

Exercice n°12 page 238 *Résoudre une équation trigonométrique*

On veut résoudre dans l'intervalle $[0\ ;\ 2\pi]$ l'équation trigonométrique (E) : $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$.

1) À l'aide d'un logiciel de calcul formel, résoudre cette équation.
Combien y a-t-il de solutions dans l'intervalle $[0\ ;\ 2\pi]$? Quelles sont ces solutions ?

1) L'utilisation d'un logiciel de calcul formel permet d'obtenir les solutions suivantes :

```
1 solve(2*(sin(x))^2+sin(x)-1=0)
```
$\left[-\left(\frac{\pi}{2}\right)\quad \frac{\pi}{6}\quad \frac{5\cdot\pi}{6}\quad \frac{3\cdot\pi}{2}\right]$

Les mesures $\frac{-\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$ correspondent au même point du cercle trigonométrique ; on ne retient que trois solutions dans l'intervalle $[0\ ;\ 2\pi]$ qui sont : $\frac{\pi}{6}$; $\frac{5\pi}{6}$; $\frac{3\pi}{2}$.

2) On pose $X = \sin x$. Écrire l'équation (E) à l'aide de X. Résoudre dans $\mathbb{R}$ cette équation d'inconnue X.

2) Si on pose $X = \sin x$, l'équation (E) devient : $2X^2 + X - 1 = 0$.
$\Delta = 1 - 4 \times 2 \times (-1) = 9$, donc $\Delta > 0$, et il y a deux solutions :
$X_1 = \frac{-1-3}{4} = -1$ et $X_2 = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2}$.

L'équation $2X^2 + X - 1 = 0$ a deux solutions -1 et $\frac{1}{2}$.

Pour résoudre l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$, on calcule le discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac$.
Si $\Delta > 0$, il y a deux solutions : $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations $\sin x = -1$ et $\sin x = \frac{1}{2}$.

En déduire les solutions dans l'intervalle $[0\ ;\ 2\pi]$ de chacune de ces deux équations.

3)
- $\sin x = -1$ équivaut à : $\sin x = \sin \frac{3\pi}{2}$,

  soit à : $\begin{cases} x = \frac{3\pi}{2} + k \times 2\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - \frac{3\pi}{2} + k \times 2\pi \end{cases}$, avec k entier relatif.

  La deuxième égalité s'écrit aussi $x = \frac{-\pi}{2} + k \times 2\pi$.

  La solution de cette équation dans l'intervalle $[0\ ;\ 2\pi]$ s'obtient avec $k = 0$ pour la première famille de solutions (on trouve $x = \frac{3\pi}{2}$) et avec $k = 1$ pour la seconde famille de solutions (on trouve encore $x = \frac{3\pi}{2}$).

$\sin x = \sin a$ équivaut à : $\begin{cases} x = a + k \times 2\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - a + k \times 2\pi \end{cases}$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

- $\sin x = \frac{1}{2}$ équivaut à : $\sin x = \sin \frac{\pi}{6}$, soit à : $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k \times 2\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - \frac{\pi}{6} + k \times 2\pi \end{cases}$, avec k entier relatif.

  La seconde égalité s'écrit aussi $x = \frac{5\pi}{6} + k \times 2\pi$.

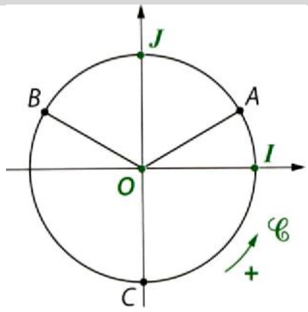
Pour $k = 0$ dans les deux familles de solutions, on obtient deux solutions de cette seconde équation : $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{5\pi}{6}$.

4) Écrire l'ensemble S des solutions de l'équation (E) qui appartiennent à l'intervalle $[0 ; 2\pi]$.
Placer sur le cercle trigonométrique les points associés à ces réels.

4) Pour résoudre (E), on résout $\sin x = X_1$, puis $\sin x = X_2$, c'est-à-dire les deux équations de la question **3)**.

Finalement : $S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right\}$.

Les points A, B et C leur correspondent respectivement.



Exercice n°15 page 241 *Résoudre une inéquation trigonométrique*

1) On se propose de résoudre dans l'intervalle $[-\pi ; \pi]$ l'inéquation $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \geq \frac{1}{2}$.

a) Déterminer les réels a de l'intervalle $[-\pi ; \pi]$ tels que $\sin a = \frac{1}{2}$.

b) A l'aide du cercle trigonométrique, déterminer les réels b tels que $\sin b \geq \frac{1}{2}$.

c) Déduire des questions précédentes un encadrement de $2x + \frac{\pi}{3}$.

d) Démontrer que l'ensemble des solutions est $S = \left[\frac{-\pi}{12}, \frac{\pi}{4}\right]$.

1)

a) L'équation $\sin a = \frac{1}{2}$ a pour solutions $\boxed{\frac{\pi}{6} \text{ et } \frac{5\pi}{6}}$ dans l'intervalle $[-\pi ; \pi]$.

b) Les réels b sont dans l'intervalle $\boxed{\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]}$.

c) Sur l'intervalle $[-\pi ; \pi]$, on a : $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \geq \frac{1}{2}$ équivalent à : $\boxed{\frac{\pi}{6} \leq 2x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{5\pi}{6}}$.

d) On obtient $\frac{-\pi}{6} \leq 2x \leq \frac{\pi}{2}$ qui équivaut à : $\frac{-\pi}{12} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$.
On a bien l'ensemble des solutions voulu.

2) Utiliser la méthode décrite ci-dessus pour résoudre dans l'intervalle $[-\pi ; \pi]$ l'inéquation $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \geq 0$.

2) L'équation $\cos a = 0$ a pour solutions $\frac{-\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ dans l'intervalle $[-\pi ; \pi]$.

Les réels b vérifiant $\cos b \geq 0$ sont les réels de l'intervalle $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Sur l'intervalle $[-\pi ; \pi]$, on a donc : $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \geq 0$ équivalent à : $\frac{-\pi}{2} \leq 2x - \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2}$.

On obtient $\frac{-\pi}{4} \leq 2x \leq \frac{3\pi}{4}$, et enfin : $\frac{-\pi}{8} \leq x \leq \frac{3\pi}{8}$.

Donc l'ensemble des solutions est : $S = \boxed{\left[\frac{-\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}\right]}$.

Exercice n°19 page 243 Q.C.M.

Dans chacun des cas suivants, indiquer **l'unique** bonne réponse.

1) Le réel $\frac{5\pi}{6}$ est solution de l'équation :	**a)** $\sin x = \sin\frac{\pi}{6}$	**b)** $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$	**c)** $\cos x = \cos\frac{\pi}{6}$
2) Le réel $\frac{\pi}{4}$ est solution de l'équation :	**a)** $\cos x = \frac{-\sqrt{2}}{2}$	**b)** $\sin x = \sin\frac{5\pi}{4}$	**c)** $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
3) L'équation $\sin x = -1$ admet dans l'intervalle $[0 ; \pi]$:	**a)** aucune solution	**b)** une solution	**c)** deux solutions
4) Parmi les solutions de l'équation	**a)** $2\,010\,\pi$	**b)** π	**c)** $100\,\pi$

$\cos x = -1$, on trouve :			
5) L'équation $\cos 2x = 1$ admet pour ensemble de solutions :	**a)** les réels de la forme $k \times 2\pi$,avec $k \in \mathbb{Z}$	**b)** les réels de la forme $k \times \pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$	**c)** le même que l'équation $\cos x = \frac{1}{2}$

1) $\boxed{\text{a}}$.

2) $\boxed{\text{c}}$.

3) $\boxed{\text{a}}$.

4) $\boxed{\text{b}}$.

5) $\boxed{\text{b}}$.

Exercice n°67 page 248 Vrai ou faux ?

a est un réel fixé de l'intervalle $\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right]$.

Préciser si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1) L'équation $\cos x = \cos a$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$.

2) L'équation $\cos x = \cos a$ admet exactement une solution dans l'intervalle $[-\pi\,;0]$.

3) L'équation $\cos x = \cos a$ admet au moins une solution dans l'intervalle $\left[\frac{-\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}\right]$.

4) L'équation $\cos x = \cos a$ admet des solutions négatives dans $\mathbb{R}$.

Dans tout l'exercice, on note k un entier relatif.

1) $\cos x = \cos a$ équivaut à : $\begin{cases} x = a + k \times 2\pi \\ \text{ou} \\ x = -a + k \times 2\pi \end{cases}$. L'affirmation est $\boxed{\text{fausse}}$.

2) L'affirmation est $\boxed{\text{vraie}}$.

3) L'affirmation est $\boxed{\text{vraie}}$.

4) L'affirmation est $\boxed{\text{vraie}}$.

Exercice n°68 page 248 Vrai ou faux ?

Préciser si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1) $\frac{27\pi}{2}$ est une solution de l'équation $\sin x = 1$.

2) Les solutions de l'équation $\sin x = \sin 1$ sont les réels $1 + k \times 2\pi$ et $\pi - 1 + k \times 2\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

3) L'équation $\sin x = 2$ admet une infinité de solutions.

4) Si α est une solution de l'équation $\sin x = 0{,}5$, alors $\alpha + \frac{\pi}{2}$ est solution de l'équation $\cos x = -0{,}5$.

1) $\frac{27\pi}{2} = \frac{-\pi}{2} + 7 \times 2\pi$, donc $\sin \frac{27\pi}{2} = \sin \frac{-\pi}{2} = -1$.

L'affirmation est $\boxed{\text{fausse}}$.

2) L'affirmation est $\boxed{\text{vraie}}$.

3) Pour tout réel x, $-1 \leq \sin x \leq 1$.

L'affirmation est $\boxed{\text{fausse}}$.

4) $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin \alpha = -0{,}5$.

L'affirmation est $\boxed{\text{vraie}}$.

Exercice n°69 page 248 Q.C.M.

Pour chacune des propositions suivantes, préciser **la (ou les)** bonne(s) réponse(s).

1) α est une solution de l'équation $\sin x = \frac{1}{2}$:

a) $\alpha = \frac{\pi}{6}$; **b)** $\alpha = \frac{-\pi}{6}$; **c)** $\alpha = \frac{39\pi}{6}$; **d)** $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

2) α est une solution de l'équation $\cos x = \frac{-1}{2}$:

a) $\alpha = \frac{-\pi}{6}$; **b)** $\alpha = \frac{2\pi}{3}$; **c)** $\alpha = \frac{32\pi}{3}$; **d)** $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

3) α est une solution de l'équation $\sin x = \cos x$:

a) $\alpha = \frac{\pi}{4}$; **b)** $\alpha = \frac{-3\pi}{4}$; **c)** $\alpha = \frac{39\pi}{4}$; **d)** $\alpha = 1$.

1) Réponse $\boxed{\text{a}}$.

2) Réponses $\boxed{\text{b et c}}$.

3) Réponses $\boxed{\text{a et b}}$.

Exercice n°70 page 249

1) Résoudre dans l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$ l'équation $\cos x = \cos \frac{\pi}{5}$.

2) Résoudre dans l'intervalle $[0\ ;\ 2\pi]$ l'équation $\sin x = \sin \frac{2\pi}{7}$.

1) $\cos x = \cos \frac{\pi}{5}$ équivaut à : $\left\{\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{5} + k \times 2\pi \\ \text{ou} \\ x = \frac{-\pi}{5} + k \times 2\pi \end{array}\right.$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

L'ensemble des solutions dans l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$ est $\boxed{\left\{\frac{-\pi}{5}, \frac{\pi}{5}\right\}}$.

2) $\sin x = \sin \frac{2\pi}{7}$ équivaut à : $\left\{\begin{array}{l} x = \frac{2\pi}{7} + k \times 2\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - \frac{2\pi}{7} + k \times 2\pi \end{array}\right.$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

L'ensemble des solutions dans l'intervalle $[0\ ;\ 2\pi]$ est $\boxed{\left\{\frac{2\pi}{7}, \frac{5\pi}{7}\right\}}$.

Exercice n°71 page 249

1) Résoudre dans l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$ l'équation $\cos x = \frac{-1}{2}$.

2) Résoudre dans l'intervalle $[0\ ;\ 2\pi]$ l'équation $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

1) $\cos x = \frac{-1}{2}$ équivaut à : $\cos x = \cos \frac{2\pi}{3}$, soit à : $\left\{\begin{array}{l} x = \frac{2\pi}{3} + k \times 2\pi \\ \text{ou} \\ x = \frac{-2\pi}{3} + k \times 2\pi \end{array}\right.$.

k	-1	0	1
$\frac{2\pi}{3} + k \times 2\pi$	$\frac{-4\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{8\pi}{3}$
$\frac{-2\pi}{3} + k \times 2\pi$	$\frac{-8\pi}{3}$	$\frac{-2\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$

L'ensemble des solutions est : $S = \boxed{\left\{\frac{-2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right\}}$.

2) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ équivaut à : $\sin x = \sin \frac{\pi}{3}$, soit à : $\left\{\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + k \times 2\pi \\ \text{ou} \\ x = \frac{2\pi}{3} + k \times 2\pi \end{array}\right.$.

k	-1	0	1
$\frac{\pi}{3} + k \times 2\pi$	$\frac{-5\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{3}$
$\frac{2\pi}{3} + k \times 2\pi$	$\frac{-4\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{8\pi}{3}$

L'ensemble des solutions est : $S = \boxed{\left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right\}}$.

Exercice n°72 page 249

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos x = -1$.

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin x = 0$.

1) $x = \pi + k \times 2\pi = \boxed{(2k+1)\,\pi}$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

2) $\left\{\begin{array}{l} x = k \times 2\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi + k \times 2\pi \end{array}\right.$, ce qui revient à écrire $x = \boxed{k\pi}$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice n°73 page 249

1) Résoudre dans $[0\ ;\ 2\pi[$ l'équation $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

2) Résoudre dans $[0\,;2\pi[$ l'équation $\sin x = \dfrac{-1}{2}$.

1) Solutions dans $\mathbb{R}$: $\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} + k \times 2\pi \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{-\pi}{4} + k \times 2\pi \end{cases}$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Solutions dans $[0\,;2\pi[$: $\boxed{\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4}}$.

2) Solutions dans $\mathbb{R}$: $\begin{cases} x = \dfrac{-\pi}{6} + k \times 2\pi \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{-5\pi}{6} + k \times 2\pi \end{cases}$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Solutions dans $[0\,;2\pi[$: $\boxed{\dfrac{7\pi}{6}, \dfrac{11\pi}{6}}$.

Exercice n°75 page 249

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin x = \dfrac{1}{2}$.

2) En déduire la résolution dans $[0\,;2\pi[$ de l'équation $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{2}$.

1) $\begin{cases} x = \boxed{\dfrac{\pi}{6} + k \times 2\pi} \\ \text{ou} \\ x = \boxed{\dfrac{5\pi}{6} + k \times 2\pi} \end{cases}$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

2) $\begin{cases} x + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{6} + k \times 2\pi \\ \text{ou} \\ x + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{5\pi}{6} + k \times 2\pi \end{cases}$, avec $k \in \mathbb{Z}$, ce qui est équivalent à : $\begin{cases} x = \dfrac{-\pi}{12} + k \times 2\pi \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{7\pi}{12} + k \times 2\pi \end{cases}$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Solutions dans $[0\,;2\pi[$: $\boxed{\dfrac{7\pi}{12}, \dfrac{23\pi}{12}}$.

Exercice n°76 page 249

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos x = \sin \dfrac{2\pi}{3}$.

2) En déduire la résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\cos\left(3x - \dfrac{\pi}{6}\right) = \sin \dfrac{2\pi}{3}$.

1) $\cos x = \sin \dfrac{2\pi}{3}$ équivaut à : $\cos x = \cos \dfrac{\pi}{6}$, soit à : $\begin{cases} x = \boxed{\dfrac{\pi}{6} + k \times 2\pi} \\ \text{ou} \\ x = \boxed{\dfrac{-\pi}{6} + k \times 2\pi} \end{cases}$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

2) $\begin{cases} 3x - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{6} + k \times 2\pi \\ \text{ou} \\ 3x - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{-\pi}{6} + k \times 2\pi \end{cases}$, ce qui est équivalent à : $\begin{cases} 3x = \dfrac{\pi}{3} + k \times 2\pi \\ \text{ou} \\ 3x = k \times 2\pi \end{cases}$; $\begin{cases} x = \boxed{\dfrac{\pi}{9} + k \times \dfrac{2\pi}{3}} \\ \text{ou} \\ x = \boxed{k \times \dfrac{2\pi}{3}} \end{cases}$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice n°77 page 249

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin(100\pi x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$\begin{cases} 100\pi x = \dfrac{\pi}{4} + k \times 2\pi \\ \text{ou} \\ 100\pi x = \dfrac{3\pi}{4} + k \times 2\pi \end{cases}$ ce qui est équivalent à : $\begin{cases} x = \boxed{\dfrac{1}{400} + \dfrac{k}{50}} \\ \text{ou} \\ x = \boxed{\dfrac{3}{400} + \dfrac{k}{50}} \end{cases}$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice n°78 page 249

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $6 \times \sin \dfrac{x}{2} = -3$; **b)** $\cos \dfrac{3x}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

a) $6 \sin \dfrac{x}{2} = -3$ équivaut à : $\sin \dfrac{x}{2} = \dfrac{-1}{2}$; soit à : $\sin \dfrac{x}{2} = \sin \dfrac{-\pi}{6}$, ou encore à :

$\begin{cases} \dfrac{x}{2} = \dfrac{-\pi}{6} + k \times 2\pi \\ \text{ou} \\ \dfrac{x}{2} = \dfrac{-5\pi}{6} + k \times 2\pi \end{cases}$; et enfin à : $\begin{cases} x = \boxed{\dfrac{-\pi}{3} + k \times 4\pi} \\ \text{ou} \\ x = \boxed{\dfrac{-5\pi}{3} + k \times 4\pi} \end{cases}$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

b) $\cos \dfrac{3x}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ équivaut à : $\begin{cases} \dfrac{3x}{4} = \dfrac{\pi}{4} + k \times 2\pi \\ \text{ou} \\ \dfrac{3x}{4} = \dfrac{-\pi}{4} + k \times 2\pi \end{cases}$; $\begin{cases} x = \boxed{\dfrac{\pi}{3} + k \times \dfrac{8\pi}{3}} \\ \text{ou} \\ x = \boxed{\dfrac{-\pi}{3} + k \times \dfrac{8\pi}{3}} \end{cases}$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice n°87 page 250 En utilisant le second degré

Résoudre dans l'intervalle $]-\pi ; \pi]$ les équations suivantes :

a) $\cos^2 x - \dfrac{1}{2} = 0$; **b)** $-\sin^2 x + 2 \cos x + 2 = 0$.

Indication : Voir l'exercice résolu **12**, page 238.

a) $\cos^2 x - \dfrac{1}{2} = 0$ équivaut à : $\cos^2 x = \dfrac{1}{2}$, soit à : $\begin{cases} \cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{ou} \\ \cos x = \dfrac{-\sqrt{2}}{2} \end{cases}$.

L'ensemble de solutions dans $]-\pi ; \pi]$ est : $S = \boxed{\left\{\dfrac{-3\pi}{4}, \dfrac{-\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right\}}$.

b) $-\sin^2 x + 2 \cos x + 2 = 0$ équivaut à :

$-(1 - \cos^2 x) + 2 \cos x + 2 = 0$

$\cos^2 x + 2 \cos x + 1 = 0$

$(\cos x + 1)^2 = 0$

$\cos x = -1$

$x = \pi + k \times 2\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$.

L'ensemble de solution dans $]-\pi ; \pi]$ est : $S = \boxed{\{\pi\}}$.

Exercice n°88 page 250 Avec un logiciel de calcul formel

1) Quelle équation le logiciel a-t-il résolue ?

2) Résoudre dans l'intervalle $]-\pi ; \pi]$ cette équation.

Indication : Voir l'exercice résolu **12**, page 238.

1) $\boxed{2 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0}$.

2) En posant $X = \sin x$, on obtient l'équation du second degré $2X^2 - X - 1 = 0$;

dont le discriminant vaut : $(-1)^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 1 + 8 = 9$;

et les racines sont $\dfrac{1-3}{4} = \dfrac{-1}{2}$ et $\dfrac{1+3}{4} = 1$.

L'équation donnée équivaut donc à : $\begin{cases} \sin x = \dfrac{-1}{2} \\ \text{ou} \\ \sin x = 1 \end{cases}$, soit à : $\begin{cases} x = \dfrac{-\pi}{6} + k \times 2\pi \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{-5\pi}{6} + k \times 2\pi \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k \times 2\pi \end{cases}$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

D'où l'ensemble des solutions dans$]-\pi\ ;\ \pi]$: $S = \boxed{\left\{\dfrac{-5\pi}{6}, \dfrac{-\pi}{6}, \dfrac{\pi}{2}\right\}}$.

__Remarque :__ $\dfrac{7\pi}{6} = \dfrac{-5\pi}{6} + 2\pi$, ce qui explique le résultat du logiciel qui n'a pas pris en compte l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$.