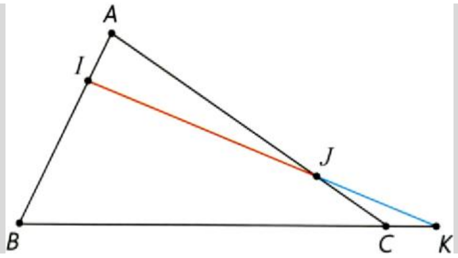
Ch.8 : Produit scalaire

Exercice n°A page 254 : Calcul vectoriel



Reproduire la figure et compléter le texte.
On considère le triangle ABC donné ci-contre.
Les points I, J et K sont définis par :

$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BK} = \frac{9}{8}\overrightarrow{BC}$.

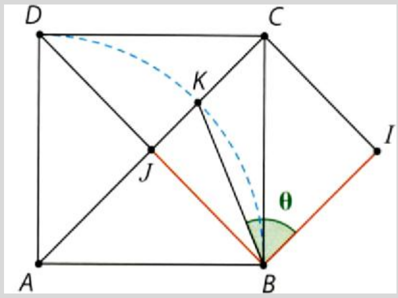
a) $\overrightarrow{IJ} = \ldots\overrightarrow{AB} + \ldots\overrightarrow{AC}$;
b) $\overrightarrow{IK} = \ldots\overrightarrow{AB} + \ldots\overrightarrow{AC}$.

a) $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ} = \boxed{\frac{-1}{4}}\overrightarrow{AB} + \boxed{\frac{3}{4}}\overrightarrow{AC}$.

b) $\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BK} = \frac{-1}{4}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \frac{9}{8}\overrightarrow{BC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{9}{8}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = \boxed{\frac{-3}{8}}\overrightarrow{AB} + \boxed{\frac{9}{8}}\overrightarrow{AC}$.

Exercice n°B page 254 : Trigonométrie – Angles orientés

Vrai ou faux ?



ABCD est un carré direct de diagonale AC = 2. Le point J est le milieu du segment [AC] et K le milieu de l'arc de cercle BD de centre A.
Le triangle BIC est isocèle direct rectangle en I.
On pose $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{v}$, $\overrightarrow{BI} = \vec{i}$, $\overrightarrow{BJ} = \vec{j}$.
Préciser si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1) Le repère $(B ; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé direct.
2) $\overrightarrow{AK} = \cos\frac{\pi}{4}\vec{u} + \sin\frac{\pi}{4}\vec{v}$.
3) $\|\overrightarrow{AK}\| = 1$.
4) $(\overrightarrow{BJ}, \overrightarrow{DC}) = \frac{\pi}{4}\ (2\pi)$.
5) $(\overrightarrow{JI}, \overrightarrow{BC}) = \frac{\pi}{2}\ (2\pi)$.
6) Si on pose $(\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{BK}) = \theta$, alors $\overrightarrow{BK} = BK(\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j})$.

1) $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$ et $(\vec{i}, \vec{j}) = \frac{\pi}{2}$.

L'affirmation est $\boxed{\text{vraie}}$.

2) Dans le repère $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$, $\overrightarrow{AK}$ a pour coordonnées $\left(\cos\frac{\pi}{4}, \sin\frac{\pi}{4}\right)$, d'où $\overrightarrow{AK} = \cos\frac{\pi}{4}\vec{u} + \sin\frac{\pi}{4}\vec{v}$.

L'affirmation est $\boxed{\text{vraie}}$.

3) D'après le théorème de Pythagore dans le triangle ABC rectangle en B, on a : $AB^2 + BC^2 = AC^2$.
D'où $2\,AB^2 = 4$ et $AB^2 = 2$, d'où $AB = \sqrt{2}$.
$\|\overrightarrow{AK}\| = \|\overrightarrow{AB}\| = AB = \sqrt{2}$.
L'affirmation est $\boxed{\text{fausse}}$.

4) La mesure principale de $(\overrightarrow{BJ}, \overrightarrow{DC})$ est négative.
L'affirmation est $\boxed{\text{fausse}}$.

5) L'affirmation est $\boxed{\text{vraie}}$.

6) Dans le repère $(B ; \overrightarrow{BI}, \overrightarrow{BJ})$, $\overrightarrow{BK}$ a pour coordonnées $(BK\cos\theta ; BK\sin\theta)$.
D'où : $\overrightarrow{BK} = BK\cos\theta\,\overrightarrow{BI} + BK\sin\theta\,\overrightarrow{BJ}$.
L'affirmation est $\boxed{\text{vraie}}$.

Exercice n°C page 254 : Calculs de normes

Vrai ou faux ?

Dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$.

Préciser si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.
1) $\|\vec{u}\| = 2\sqrt{5}$.
2) $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.

3) Si A et B sont des points tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$, alors le triangle OAB est rectangle en A.

1) $\|\vec{u}\| = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

L'affirmation est $\boxed{\text{vraie}}$.

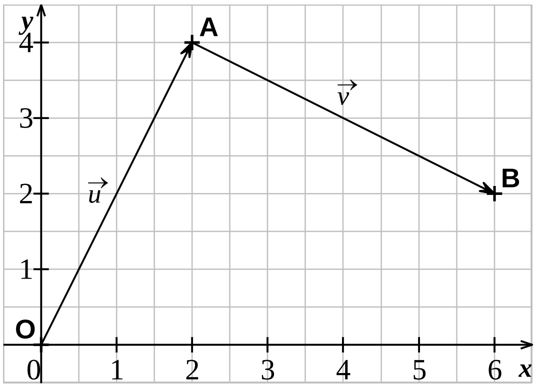
2) $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$, d'où $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$.

$\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| = 2\sqrt{5} + \sqrt{4^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{5} + \sqrt{20} = 4\sqrt{5}$.

L'affirmation est $\boxed{\text{fausse}}$.

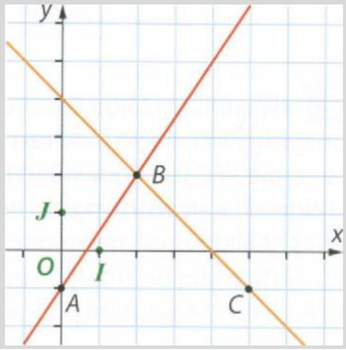
3) $OA^2 = \|\vec{u}\|^2 = 20$; $AB^2 = \|\vec{v}\|^2 = 20$; $OB^2 = \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = 40$.
D'où $OA^2 + AB^2 = OB^2$, et, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, OAB est rectangle en A.

L'affirmation est $\boxed{\text{vraie}}$.



Exercice n°D page 254 : Équation cartésienne d'une droite

Q.C.M. Déterminer **la (ou les)** bonne(s) réponse(s).



1) La droite (AB) a pour vecteur directeur :

a) $\overrightarrow{AB}$. **b)** $2\overrightarrow{OI} + 3\overrightarrow{OJ}$. **c)** $\vec{u}\begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix}$.

2) La droite (AB) a pour équation cartésienne :

a) $3x - 2y = 2$. **b)** $y = \frac{2}{3}x - 1$. **c)** $y = \frac{3}{2}x - 1$.

3) Le couple des coordonnées du point B est solution du système :

a) $\begin{cases} \frac{3}{2}x - y = 1 \\ x + y = 4 \end{cases}$. **b)** $\begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ x - y = 4 \end{cases}$. **c)** $\begin{cases} y = \frac{3}{2}x - 1 \\ x + y = 4 \end{cases}$.

1) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, d'où $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{OI} + 3\overrightarrow{OJ}$ et $\vec{u} = -2\overrightarrow{AB}$.

Les réponses $\boxed{\text{a, b et c}}$ sont bonnes.

2) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et (AB) coupe l'axe des ordonnées en -1, donc une équation de (AB) est $y = \frac{3}{2}x - 1$.

Cette équation équivaut à : $3x - 2y = 2$.

Les réponses $\boxed{\text{a et c}}$ sont bonnes.

3) B appartient à (AB) et à (BC), donc les coordonnées de B vérifient les équations de (AB) et (BC).
(BC) a pour coefficient directeur -1 et coupe l'axe des ordonnées en 4, alors (BC) a pour équation $y = -x + 4$.

Les réponses $\boxed{\text{a et c}}$ sont bonnes.

1 PRODUIT SCALAIRE DE DEUX VECTEURS

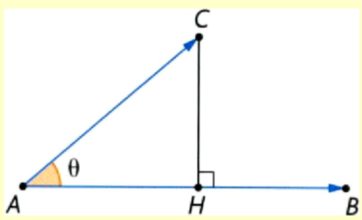
1.1 Deux définitions géométriques équivalentes

DÉFINITION 1

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls, tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, leur produit scalaire est le nombre réel, noté $\vec{u}.\vec{v}$, défini par :

  1) $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) = AB \times AC \times \cos\widehat{BAC}$.

  2) $\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \begin{cases} AB \times AH & \text{si } \widehat{BAH} = 0 \\ -AB \times AH & \text{si } \widehat{BAH} = \pi \end{cases}$, où H est le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB).



- Si $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est le vecteur nul, on définit : $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

Remarques :

- L'équivalence entre les deux définitions résulte du fait que $AC \times \cos \widehat{BAC}$ vaut soit AH soit $-AH$ suivant que l'angle $\widehat{BAC}$ a une mesure comprise entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ ou entre $\frac{\pi}{2}$ et π.
- Avec la deuxième définition, le produit scalaire $\vec{AB}.\vec{AC}$ se ramène par projection orthogonale au produit scalaire des deux vecteurs colinéaires $\vec{AB}$ et $\vec{AH}$ puisque $\cos \widehat{BAH}$ vaut alors 1 ou -1 :
  $\vec{AB}.\vec{AC} = \vec{AB}.\vec{AH}$.

Le carré scalaire :

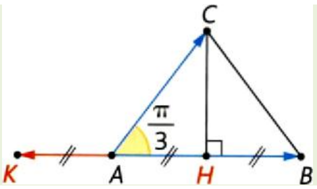
Le produit scalaire du vecteur $\vec{u}$ par lui-même est appelé **carré scalaire de $\vec{u}$**, noté $\vec{u}^2$.
On a $\vec{u}^2 = \vec{u}.\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$ puisque $\cos(\vec{u}, \vec{u}) = 1$, ou encore $\vec{AB}^2 = \vec{AB}.\vec{AB} = AB^2$.

Exemple :

Dans le triangle équilatéral ABC, en posant $AB = a$, on a :

$$\vec{AB}.\vec{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC} = a \times a \times \cos \frac{\pi}{3} = \frac{a^2}{2} ;$$

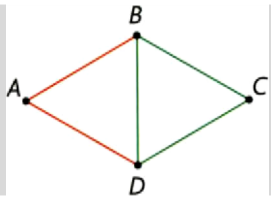
$$\vec{AK}.\vec{AC} = \vec{AK}.\vec{AH} = -AK \times AH = -\frac{a}{2} \times \frac{a}{2} = \frac{-a^2}{4} .$$



Exercice n°1 page 259

ABD et BCD sont deux triangles équilatéraux.
On donne $BD = 4$.
Calculer les produits scalaires suivants :

a) $\vec{AB}.\vec{AD}$; **c)** $\vec{DB}.\vec{CD}$; **e)** $\vec{BD}.\vec{CA}$.
b) $\vec{BA}.\vec{BC}$; **d)** $\vec{AD}.\vec{CB}$;



a) $\vec{AB}.\vec{AD} = AB \times AD \times \cos \widehat{BAD} = 4 \times 4 \times \frac{1}{2} = \boxed{8}$.

b) $\vec{BA}.\vec{BC} = BA \times BC \times \cos \widehat{ABC} = 4 \times 4 \times \frac{-1}{2} = \boxed{-8}$.

c) $\vec{DB}.\vec{CD} = BD \times CD \times \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = 4 \times 4 \times \frac{-1}{2} = \boxed{-8}$.

d) $\vec{AD}.\vec{CB} = \vec{AD}.\vec{DA} = AD^2 \times \cos \pi = \boxed{-16}$.

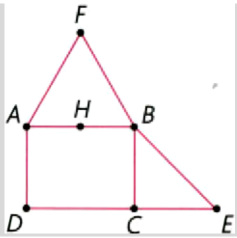
e) $\vec{BD}.\vec{CA} = BD \times CA \times \cos \frac{\pi}{2} = \boxed{0}$.

Exercice n°35 page 273

La figure ci-contre représente :
- un rectangle ABCD tel que : $AB = 4$ et $BC = 3$;
- un triangle ABF équilatéral ;
- un triangle BCE rectangle et isocèle en C.

Le point H est le milieu du segment [AB].
Calculer les produits scalaires suivants :

a) $\vec{AB}.\vec{AH}$; **b)** $\vec{BC}.\vec{BE}$; **c)** $\vec{BA}.\vec{AF}$; **d)** $\vec{BD}.\vec{CE}$; **e)** $\vec{BE}.\vec{BA}$; **f)** $\vec{AD}.\vec{CE}$.



a) $\vec{AB}.\vec{AH} = AB \times AH = 4 \times 2 = \boxed{8}$.

b) C est le projeté orthogonal de E sur (BC), donc $\vec{BC}.\vec{BE} = BC \times BC = BC^2 = 3^2 = \boxed{9}$.

c) H est le projeté orthogonal de F sur (AB), donc $\vec{BA}.\vec{AF} = -AB \times AH = -4 \times 2 = \boxed{-8}$.

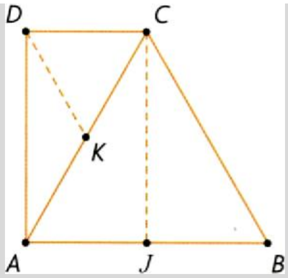
d) C est le projeté orthogonal de B sur (CE), donc $\vec{BD}.\vec{CE} = -CD \times CE = -4 \times 3 = \boxed{-12}$.

e) C est le projeté orthogonal de B sur (CE), donc $\vec{BE}.\vec{BA} = \vec{BE}.\vec{CD} = -CE \times CD = -3 \times 4 = \boxed{-12}$.

f) $(AD) \perp (CE)$, donc $\vec{AD}.\vec{CE} = \boxed{0}$.

Exercice n°36 page 273

ABC est un triangle équilatéral direct, ABCD est un trapèze direct, rectangle en A et D.
On a AB = 6 et donc CD = 3.
Le point K désigne le milieu du segment [AC] et le point J celui de [AB].
On pourra utiliser les mesures des angles de la figure nécessaires aux calculs sans donner de justification de leurs valeurs.



1) Calculer les produits scalaires :
a) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$; **b)** $\overrightarrow{KC}.\overrightarrow{CB}$; **c)** $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{BA}$; **d)** $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}$.

2) On appelle H le projeté orthogonal du point D sur la droite (AC). Calculer la longueur AH.

1) **a)** J est le projeté orthogonal de C sur (AB), donc $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} = AJ \times AB = 3 \times 6 = \boxed{18}$.

b) K est le projeté orthogonal de B sur (KC), donc $\overrightarrow{KC}.\overrightarrow{CB} = -KC \times KC = -KC^2 = -3^2 = \boxed{-9}$.

c) $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{BA} = -DC \times BA = -3 \times 6 = \boxed{-18}$.

d) D'après le théorème de Pythagore dans ACD, on a $AD^2 + CD^2 = AC^2$,
d'où $AD^2 = AC^2 - CD^2 = 6^2 - 3^2 = 27$.

D est le projeté orthogonal de C sur (AD), donc $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = AD \times AD = AD^2 = \boxed{27}$.

2) On a $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = AC \times AH$ et $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = 27$, donc $6 \times AH = 27$, d'où $AH = \dfrac{27}{6} = \boxed{4,5}$.

Exercice n°26 page 272 Q.C.M.

Donner la (**ou les**) bonne(s) réponse(s).

1) ABCD est un parallélogramme.
a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0$. **b)** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC} = AB^2$. **c)** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = AB \times BC$. **d)** $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DA} = -BC^2$.

2) On considère les points A(–2 ; 2), B(1 ; 4) et C(3 ; 0) dans un repère orthonormé.
a) $AB = \sqrt{13}$. **b)** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = \sqrt{13}$. **c)** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$. **d)** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = -2$.

1) $\boxed{\text{b et d}}$.

2) $\boxed{\text{a et d}}$.

Exercice n°27 page 272 Q.C.M.

Donner **la** bonne réponse.

1) $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont deux vecteurs tels que AB = 2, AC = 5 et $\widehat{BAC} = \dfrac{\pi}{3}$.
a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 5$. **b)** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 5\sqrt{3}$. **c)** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 10$.

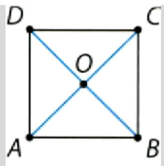
2) ABC est un triangle équilatéral de côté a.
a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 2$. **b)** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = -a^2$. **c)** $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AC} = a^2$.

1) $\boxed{\text{a}}$.

2) $\boxed{\text{a}}$.

Exercice n°34 page 273

Le carré ABCD a pour côté a.
On note O le point d'intersection de ses diagonales.
Calculer, en fonction de a, les produits scalaires suivants :



a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AO}$; **b)** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$; **c)** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OD}$; **d)** $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}$.

a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AO} = \boxed{\dfrac{a^2}{2}}$.

b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \boxed{-a^2}$.

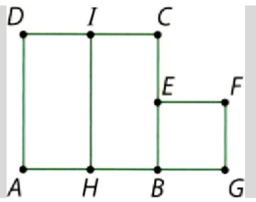
c) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OD} = \boxed{\dfrac{-a^2}{2}}$.

d) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = \boxed{a^2}$.

Exercice n°42 page 273

ABCD est un carré de côté 2. Les points E, I et H sont des milieux de côtés du carré ABCD. BEFG est un carré. Calculer les produits scalaires suivants :

a) $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{FE}$; **b)** $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{BG}$; **c)** $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{DG}$; **d)** $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{FG}$; **e)** $\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{HF}$.



a) $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{GB} = -AH \times GB = -1 \times 1 = \boxed{-1}$.

b) B est le projeté orthogonal de E sur (BG), donc $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{BG} = AB \times BG = 2 \times 1 = \boxed{2}$.

c) A est le projeté orthogonal de D sur (AH), donc $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{DG} = AH \times AG = 1 \times 3 = \boxed{3}$.

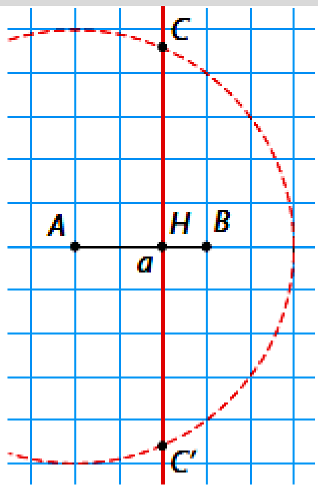
d) C est le projeté orthogonal de D sur (BE), donc $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{DB}.\overrightarrow{EB} = BC \times BE = 2 \times 1 = \boxed{2}$.

e) $(IB) \perp (HF)$, donc $\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{HF} = \boxed{0}$.

Exercice n°120 page 280

Construire un triangle ABC tel que : $AB = 3$, $AC = 5$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 6$.
On pourra utiliser la projection du point C sur la droite (AB).

On appelle H le projeté orthogonal de C sur (AB).
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AH = 3\ AH$.
On doit avoir $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 6$, soit $3AH = 6$, donc $AH = 2$.
Comme $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} > 0$, alors $H \in [AB)$.
On place donc H sur [AB) tel que $AH = 2$.
C est à l'intersection du cercle de centre A et de rayon 5 avec la droite perpendiculaire en H à (AB).



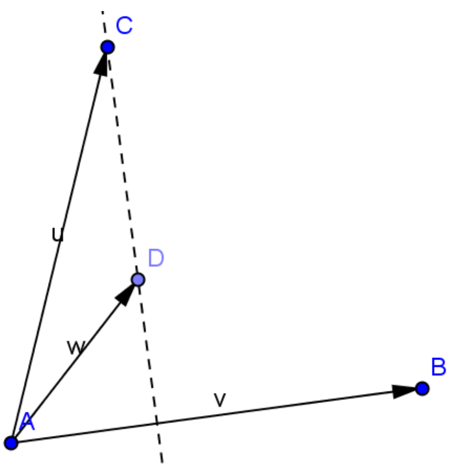
Exercice n°30 page 272 Vrai ou faux ?

Préciser si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1) Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.
2) Si $\vec{u}.\vec{v} = \vec{u}.\vec{w}$, alors $\vec{v} = \vec{w}$.
3) Soit EFG un triangle isocèle en E tel que $EF = 12$ et $FG = 6$, alors $\overrightarrow{FE}.\overrightarrow{FG} = 18$.
4) Soit ABC un triangle tel que $AB = 5$, $BC = 2$ et $\widehat{ABC} = \frac{2\pi}{3}$, alors $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = 5$.

1) $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$, et $(\vec{u}, \vec{v}) = \pi + k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$, donc $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = 1$ ou -1.
L'affirmation est $\boxed{\text{fausse}}$.

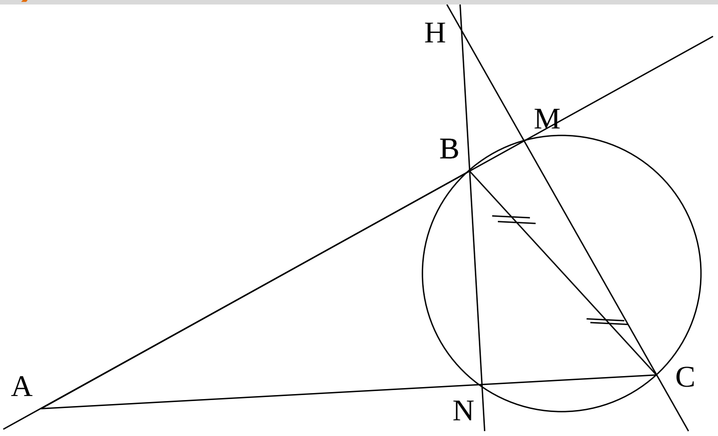
2) L'affirmation est $\boxed{\text{fausse}}$.



Exercice n°33 page 272 Vrai ou faux ?

Soit ABC un triangle, le cercle de diamètre [BC] coupe (AB) en M et (AC) en N. Les droites (BN) et (CM) se coupent en H.
Préciser si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1) $BC^2 = BM^2 + MC^2$. **2)** $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AN}$. **3)** $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0$. **4)** $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AN}$.



1) M appartient au cercle de diamètre [BC], donc BCM est rectangle en M.
L'affirmation est $\boxed{\text{vraie}}$.

2) N appartient au cercle de diamètre [BC], donc BCN est rectangle en N.
Alors N est le projeté orthogonal de B sur (AC).
L'affirmation est $\boxed{\text{vraie}}$.

3) B est l'orthocentre du triangle ACH, donc (BC) est la hauteur issue de C.
L'affirmation est $\boxed{\text{vraie}}$.

4) B n'est pas le projeté orthogonal de N sur (AM).
L'affirmation est $\boxed{\text{fausse}}$.

1.2 Produit scalaire et normes

PROPRIÉTÉ 1

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a : $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$.

Démonstration :

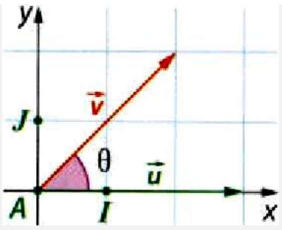
Si $\vec{u} = \vec{0}$, les trois expressions sont nulles ; l'égalité est donc vraie.

Si $\vec{u} \neq \vec{0}$, dans le repère orthonormé (A ; I, J) tel que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u}$,

on a : $\vec{u}\begin{pmatrix}\|\vec{u}\| \\ 0\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\|\vec{v}\|\cos\theta \\ \|\vec{v}\|\sin\theta\end{pmatrix}$ et d'après l'activité 2, on sait que :

$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = 2\left(\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|\cos\theta + 0 \times \|\vec{v}\|\sin\theta\right)$;

d'où : $\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right) = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|\cos\theta = \vec{u}.\vec{v}$.



Exercice n°31 page 272 Vrai ou faux ?

Préciser si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1) Si $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{-1}{2}$, alors $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = 7$.

2) Si $\|\vec{u}\| = \sqrt{5}$, $\vec{u}.\vec{v} = -5$ et $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = -1$, alors $\|\vec{u}+\vec{v}\| = 0$.

1) $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) = 2 \times 3 \times \frac{-1}{2} = -3$.

$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$ équivaut à : $-3 = \frac{1}{2}\left(2^2 + 3^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$;

d'où $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = 13 + 6 = \boxed{19}$.

L'affirmation est $\boxed{\text{fausse}}$.

2) $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$ équivaut à : $-5 = \sqrt{5} \times \|\vec{v}\| \times (-1)$, d'où $\|\vec{v}\| = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$.

$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$ équivaut à : $-5 = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - (\sqrt{5})^2 - (\sqrt{5})^2\right)$;

d'où $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = -10 + 10 = 0$.

L'affirmation est $\boxed{\text{vraie}}$.

Exercice n°37 page 273

ABCD est un parallélogramme tels que AB = 5, AD = 3 et AC = 7. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$.

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, d'où $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(AC^2 - AB^2 - AC^2) = \frac{1}{2}(49 - 25 - 9) = \boxed{\frac{15}{2}}$.

1.3 Produit scalaire en repère orthonormé

PROPRIÉTÉ 2

Dans un repère orthonormé, soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs, alors : $\vec{\mathbf{u}}.\vec{\mathbf{v}} = xx' + yy'$.

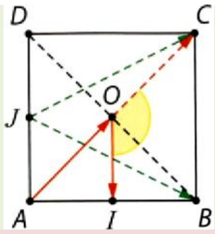
Piste de démonstration :

Utiliser la propriété 1 et l'activité 2 : dans tout repère orthonormé : $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = 2\,(xx' + yy')$.

Exercice corrigé : ***Calculer un produit scalaire***

ABCD est un carré de centre O, de côté 2.
Les points I et J sont les milieux respectifs des segments [AB] et [AD]
Calculer les produits scalaires suivants :
a) $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AC}$; **b)** $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{OI}$; **c)** $\overrightarrow{JC}.\overrightarrow{JB}$; **d)** $\overrightarrow{DJ}.\overrightarrow{BC}$.

On pourra dans certains cas utiliser le repère orthonormé (A ; I, J).



Solution :

a) $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AC} = AI \times AC \times \cos\widehat{IAC} = 1 \times 2\sqrt{2} \times \cos\frac{\pi}{4} = 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2$.

On peut aussi utiliser le projeté orthogonal du point C sur la droite (AI) qui est le point B. De plus, comme l'angle $\widehat{IAB} = 0$, on obtient : $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AB} = AI \times AB = 1 \times 2 = 2$.

b) $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$, donc $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OI}$ et comme $\widehat{COI} = \frac{3\pi}{4}$, $OI = 1$ et $OC = \sqrt{2}$, on obtient :

$\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{OI} = \sqrt{2} \times 1 \times \cos\frac{3\pi}{4} = \sqrt{2} \times \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$; soit $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{OI} = -1$.

c) L'angle $\widehat{CJB}$ n'est pas connu. Dans le repère orthonormé (A ; I, J), les points J, C et B ont pour coordonnées (0 ; 1), (2 ; 2) et (2 ; 0). Donc $\overrightarrow{JC}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{JB}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Par suite $\overrightarrow{JC}.\overrightarrow{JB} = 2 \times 2 + 1 \times (-1) = 3$.

d) Les droites (DJ) et (BC) sont parallèles, donc les vecteurs $\overrightarrow{DJ}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires. De plus, comme $(\overrightarrow{DJ}, \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{DJ}, \overrightarrow{AD}) = \pi\ (2\pi)$, on a : $\overrightarrow{DJ}.\overrightarrow{BC} = DJ \times BC \times \cos\pi = 1 \times 2 \times (-1) = -2$.

Méthode :
On utilise au choix l'une des deux définitions géométriques.

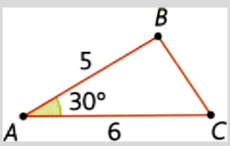
Le produit scalaire est indépendant des représentants des vecteurs : on peut les choisir de même origine pour bien visualiser l'angle.

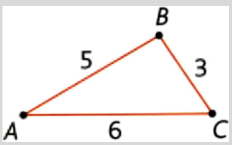
Lorsque l'angle n'est pas connu on peut se placer dans un repère orthonormé et utiliser l'égalité : $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$.

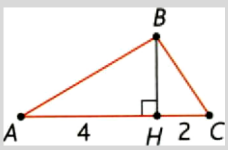
→ Voir la fiche **Algobox**, page 387.

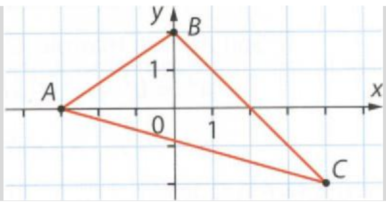
Exercice n°3 page 259

Dans chacun des cas suivants, choisir l'expression la plus adaptée pour calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.









- Figure 1 : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\widehat{BAC} = 5 \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{15\sqrt{3}}$.
- Figure 2 : $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$,
  d'où $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2 - \|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\|^2) = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2) = \frac{1}{2}(25 + 36 - 9) = \boxed{26}$.
- Figure 3 : H est le projeté orthogonale de B sur (AC), alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AC \times AH = 4 \times 6 = \boxed{24}$.
- Figure 4 : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}$, d'où $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 3 \times 7 + 2(-2) = 21 - 4 = \boxed{17}$.

Exercice n°4 page 259

Dans un repère orthonormé, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Calculer $\vec{u}.\vec{v}$, $\vec{u}^2$ et $\|\vec{v}\|$.

- $\vec{u}.\vec{v} = 2 \times 5 + (-3) \times 1 = 10 - 3 = \boxed{7}$.
- $\vec{u}^2 = 2^2 + (-3)^2 = 4 + 9 = \boxed{13}$.
- $\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v}^2} = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{25 + 1} = \boxed{\sqrt{26}}$.

Exercice n°2 page 259

ABC est un triangle tel que : $AB = AC = 3$ et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{4}$.

1) Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.
2) En remarquant que $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$, calculer $\|\overrightarrow{BC}\|^2$ par la propriété 1.
3) Calculer $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$.

1) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC} = \boxed{\frac{9\sqrt{2}}{2}}$.

2) On a $\|\overrightarrow{BC}\|^2 = (\overrightarrow{BC})^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = AC^2 + AB^2 - 2\,\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.
On obtient $\|\overrightarrow{BC}\|^2 = \boxed{18 - 9\sqrt{2}}$.

3) $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BC} = BH \times BC = \frac{1}{2} BC^2 = \boxed{\frac{18 - 9\sqrt{2}}{2}}$, où H est le projeté orthogonal du point A sur la droite (BC), c'est-à-dire le milieu du segment [BC], puisque le triangle ABC est isocèle en A.

Exercice n°28 page 272 Vrai ou faux ?

Préciser si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1) On donne $\|\vec{u}\| = 1$, $\|\vec{v}\| = 2$ et $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{2\pi}{3}$, alors :
- **a)** $\vec{u}.\vec{v} = -1$;
- **b)** $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = 3$.

2) On donne $\|\vec{u}\| = \sqrt{2}$, $\|\vec{v}\| = 1$ et $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{-\pi}{4}$, alors :
- **a)** $\vec{u}.\vec{v} = -1$;
- **b)** $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = 5$.

1) $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) = 1 \times 2 \times \frac{-1}{2} = -1$.

L'affirmation est $\boxed{\text{vraie}}$.

2) $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\,\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2 = 1^2 + 2(-1) + 2^2 = 3$.
L'affirmation est $\boxed{\text{vraie}}$.

3) $\boxed{\text{Faux}}$.

4) $\boxed{\text{Vrai}}$.

Exercice n°38 page 273

Dans un repère orthonormé (O ; I, J) on donne les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}$.

1) Calculer $\vec{u}.\vec{v}$.
2) Calculer de deux façons $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2$ et $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2$.
3) Calculer $(\vec{u} + \vec{v}).(\vec{u} - \vec{v})$. Que peut-on en déduire pour l'angle $(\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{v})$?

1) $\vec{u}.\vec{v} = 3 \times (-1) + 1 \times (-3) = -3 - 3 = \boxed{-6}$.

2)
- $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2 = 10 + 2 \times (-6) + 10 = \boxed{8}$.
  $(\vec{u} + \vec{v})\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$, donc $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = 2^2 + (-2)^2 = 4 + 4 = \boxed{8}$.
- $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = (\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2 = 10 - 2 \times (-6) + 10 = \boxed{32}$.
  $(\vec{u} - \vec{v})\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}$, donc $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 4^2 + 4^2 = \boxed{32}$.

3) $(\vec{u} + \vec{v})\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$ et $(\vec{u} - \vec{v})\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}$, donc $(\vec{u} + \vec{v}).(\vec{u} - \vec{v}) = 2 \times 4 + (-2) \times 4 = \boxed{0}$.

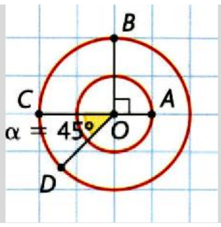
L'angle $(\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{v})$ est $\boxed{\text{droit}}$.

Exercice n°40 page 273

Sur la figure ci-contre les cercles sont de rayons OA = 1 et OB = 2.

1) Calculer les produits scalaires $\vec{OA}.\vec{OC}$ et $\vec{OC}.\vec{OD}$.

2) Calculer les produits scalaires $\vec{OB}.\vec{OD}$ et $\vec{AB}.\vec{CD}$.



1) $\vec{OA}.\vec{OC} = \boxed{-2}$; $\vec{OC}.\vec{OD} = OC \times OD \cos 45° = \boxed{2\sqrt{2}}$.

2) Dans le repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{OA}, \frac{1}{2}\vec{OB})$, on a : $A(1\ ;\ 0)$, $B(0\ ;\ 2)$, $C(-2\ ;\ 0)$ et $D(-\sqrt{2}\ ;\ -\sqrt{2})$,

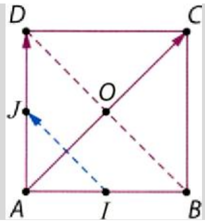
donc $\vec{OB}\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$, $\vec{OD}\begin{pmatrix}-\sqrt{2}\\-\sqrt{2}\end{pmatrix}$ et $\vec{OB}.\vec{OD} = \boxed{-2\sqrt{2}}$.

D'autre part $\vec{AB}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{CD}\begin{pmatrix}-\sqrt{2}+2\\-\sqrt{2}\end{pmatrix}$, donc $\vec{AB}.\vec{CD} = \boxed{-(2+\sqrt{2})}$.

Exercice n°43 page 273

ABCD est un carré de centre O, de côté 2.
Les points I et J sont les milieux respectifs des segments [AB] et [AD].
En utilisant, si nécessaire, le repère orthonormé (A ; I, J), calculer les produits scalaires suivants :

a) $\vec{AD}.\vec{AC}$; **b)** $\vec{IJ}.\vec{AC}$; **c)** $\vec{BJ}.\vec{CA}$; **d)** $\vec{IO}.\vec{BO}$.



a) $\vec{AD}.\vec{AC} = \vec{AO}.\vec{AC} = \sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = \boxed{4}$.

b) $\vec{IJ}.\vec{AC} = \boxed{0}$, car (IJ) // (BD) et (BD) $\perp$ (AC).

c) $\vec{BJ}.\vec{CA} = \boxed{2}$, car $\vec{BJ}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{CA}\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}$.

d) $\vec{IO}.\vec{BO} = \boxed{1}$, car $\vec{IO}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{BO}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$.

Exercice n°44 page 274

Déterminer dans chacun des cas suivants, les deux nombres qui manquent parmi les 5 nombres proposés :
$\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$, $\|\vec{u}+\vec{v}\|$, $\vec{u}.\vec{v}$ et $\cos(\vec{u}, \vec{v})$.

a) $\|\vec{u}\| = 2$; $\|\vec{v}\| = 3$; $\|\vec{u}+\vec{v}\| = \dots$; $\vec{u}.\vec{v} = -3\sqrt{3}$; $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \dots$.

a)
- $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$ équivaut à : $-3\sqrt{3} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - 4 - 9\right)$,

  d'où $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = 13 - 6\sqrt{3}$,

  et donc $\|\vec{u}+\vec{v}\| = \boxed{\sqrt{13-6\sqrt{3}}}$.
- $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$ équivaut à : $-3\sqrt{3} = 2 \times 3 \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$,

  d'où $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{-3\sqrt{3}}{6} = \boxed{\frac{-\sqrt{3}}{2}}$.

b) $\|\vec{u}\| = 3$; $\|\vec{v}\| = 4$; $\|\vec{u}+\vec{v}\| = 6$; $\vec{u}.\vec{v} = \dots$; $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \dots$.

b)
- $(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$ équivaut à : $6^2 = 3^2 + 2\,\vec{u}.\vec{v} + 4^2$,

  d'où $\vec{u}.\vec{v} = \frac{36-9-16}{2} = \boxed{\frac{11}{2}}$.
- $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$ équivaut à : $\frac{11}{2} = 3 \times 4 \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$,

  d'où : $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{11}{2} \times \frac{1}{12} = \boxed{\frac{11}{24}}$.

c) $\|\vec{u}\| = \sqrt{2}$; $\|\vec{v}\| = \dots$; $\|\vec{u}+\vec{v}\| = \dots$; $\vec{u}.\vec{v} = -2$; $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = -1$.

c)
- $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$ équivaut à : $-2 = \sqrt{2}\,\|\vec{v}\| \times (-1)$,

  d'où : $\|\vec{v}\| = \frac{2}{\sqrt{2}} = \boxed{\sqrt{2}}$.
- $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$ équivaut à : $-2 = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - 2 - 2\right)$,

d'où $\|\vec{u}+\vec{v}\| = 4-4 = \boxed{0}$.

2 PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES DU PRODUIT SCALAIRE

PROPRIÉTÉS 6

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ du plan et pour tout réel k, on a :

Symétrie :

1) $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$

Linéarité :

2) $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$

3) $\vec{u}.(k\vec{v}) = (k\vec{u}).\vec{v} = k(\vec{u}.\vec{v})$

Identités remarquables :

4) $(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$

5) $(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$

6) $(\vec{u}-\vec{v}).(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$.

Démonstration partielle :

On peut utiliser l'expression du produit scalaire en repère orthonormé.

Pour la relation **2)** si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}x''\\y''\end{pmatrix}$ alors $\vec{v}+\vec{w}\begin{pmatrix}x'+x''\\y'+y''\end{pmatrix}$,

et par suite : $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = x(x'+x'') + y(y'+y'') = (xx'+yy') + (xx''+yy'') = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$.

Les identités **4)** et **5)** s'obtiennent à partir de la propriété 1 de la page 258.

→ Voir la **démonstration** de ces propriétés aux exercices 58 et 59, page 275.

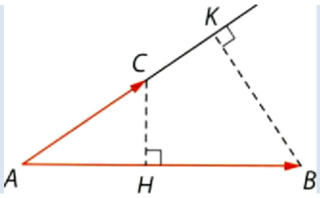
Illustration de la propriété 1)

Dans la configuration ci-contre (avec $\widehat{BAH} = 0$) :

$\vec{AB}.\vec{AC} = AB \times AH$.

$\vec{AC}.\vec{AB} = AC \times AK$.

Et donc par symétrie : $AB \times AH = AC \times AK$.



Exercice n°47 page 274

On a $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $\vec{u}.\vec{v} = -1$.

1) Calculer $(\vec{u}+\vec{v})^2$, et $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2$.

2) Calculer $(\vec{u}+\vec{v}).(2\vec{u}-3\vec{v})$.

1) $(\vec{u}+\vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2 = 4 + 2\times(-1) + 9 = \boxed{11}$.

$\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = (\vec{u}-\vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2 = 4 - 2\times(-1) + 9 = \boxed{15}$.

2) $(\vec{u}+\vec{v}).(2\vec{u}-3\vec{v}) = 2\vec{u}^2 - 3\vec{u}.\vec{v} + 2\vec{v}.\vec{u} - 3\vec{v}^2 = 2\vec{u}^2 - \vec{u}.\vec{v} - 3\vec{v}^2 = 2\times 2^2 - (-1) - 3\times 3^2 = 8 + 1 - 27 = \boxed{-18}$.

Exercice n°49 page 274

On a $\|\vec{u}\| = 6$, $\|\vec{v}\| = 2$ et $\vec{u}.\vec{v} = 5$.

Calculer la norme du vecteur $-2\vec{u} + 5\vec{v}$.

$\|-2\vec{u}+5\vec{v}\|^2 = (-2\vec{u}+5\vec{v})^2 = 4\vec{u}^2 - 20\vec{u}.\vec{v} + 25\vec{v}^2 = 4\times 6^2 - 20\times 5 + 25\times 2^2 = 144 - 100 + 100 = 144$,

donc $\|-2\vec{u}+5\vec{v}\| = \sqrt{144} = \boxed{12}$.

Exercice n°51 page 274

Soit A et B deux points distincts du plan et I le milieu du segment [AB].

Démontrer que quel que soit le point M du plan, on a l'égalité : $MA^2 - MB^2 = (\vec{MA}+\vec{MB}).\vec{BA} = 2\,\vec{MI}.\vec{BA}$.

- $MA^2 - MB^2 = (\vec{MA}+\vec{MB}).(\vec{MA}-\vec{MB}) = (\vec{MA}+\vec{MB}).(\vec{MA}+\vec{BM})$.
  Or $\vec{MA}-\vec{MB} = \vec{MA}+\vec{BM} = \vec{BM}+\vec{MA} = \vec{BA}$, donc $MA^2 - MB^2 = (\vec{MA}+\vec{MB}).\vec{BA}$.
- $\vec{MA}+\vec{MB} = (\vec{MI}+\vec{IA}) + (\vec{MI}+\vec{IB}) = 2\,\vec{MI}$, donc $MA^2 - MB^2 = 2\,\vec{MI}.\vec{BA}$.

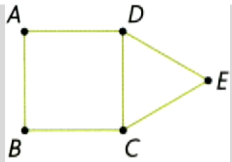
Exercice n°52 page 274

ABCD est un carré de côté a et DCE est un triangle équilatéral.

On s'intéresse au triangle BDE.

1) Calculer les produits scalaires $\vec{AB}.\vec{DE}$, $\vec{DA}.\vec{DE}$ en fonction de a.

2) Calculer BE^2. On pourra décomposer $\vec{BE}$ en $\vec{BD}+\vec{DE}$.



1) $\vec{AB}.\vec{DE} = \vec{DC}.\vec{DE} = CD \times DE \times \cos\widehat{CDE} = a \times a \times \cos 60° = \boxed{\dfrac{a^2}{2}}$

$\vec{DA}.\vec{DE} = DA \times DE \times \cos\widehat{ADE} = a \times a \times \cos 150° = a \times a \times \dfrac{-\sqrt{3}}{2} = \boxed{\dfrac{-a^2\sqrt{3}}{2}}$.

2) $\overrightarrow{BE}^2 = (\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DE})^2 = BD^2 + 2\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{DE} + DE^2$.

On a $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{DE} = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}).\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{DE} = -\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DE} - \overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DE} = \dfrac{-a^2}{2} + \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^2(\sqrt{3}-1)}{2}$,

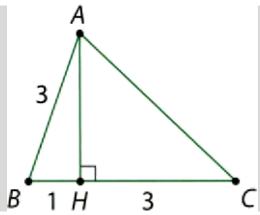
donc $\overrightarrow{BE}^2 = (a\sqrt{2})^2 + 2 \times \dfrac{a^2(\sqrt{3}-1)}{2} + a^2 = 2a^2 + a^2(\sqrt{3}-1) + a^2 = \boxed{a^2\,(2+\sqrt{3})}$.

Exercice n°55 page 274

Calculer les produits scalaires suivants :

a) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AH}).\overrightarrow{AB}$;

b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$. (Dans ce cas, on pourra décomposer les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ à l'aide de la relation de Chasles en utilisant le point H.)



a) Le théorème de Pythagore dans le triangle AHB donne $AH^2 = AB^2 - BH^2 = 9 - 1 = 8$.

$(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AH}).\overrightarrow{AB} = AB^2 + \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AB} = AB^2 + AH^2 = 9 + 8 = \boxed{17}$.

b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}).(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC}) = AH^2 + \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{HC} + \overrightarrow{HB}.\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}.\overrightarrow{HC} = 8 + 0 + 0 - 1 \times 3 = \boxed{5}$.

Exercice n°6 page 261

a) $(2\vec{u} + 3\vec{v}).(\vec{u} - \vec{v})$;

b) $\|\vec{u} + \vec{v}\|$.

c) $\|\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v}\|$.

a) $\vec{u}.\vec{v} = \boxed{-3}$.

b) $(2\vec{u} + 3\vec{v}).(\vec{u} - \vec{v}) = 2\|\vec{u}\|^2 + \vec{u}.\vec{v} - 3\|\vec{v}\|^2 = 3$.

c) $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\,\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2 = 7$, donc $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \boxed{\sqrt{7}}$.

d) $\|\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \frac{1}{4}\|\vec{v}\|^2 - \vec{u}.\vec{v} = 13$, donc $\|\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v}\| = \boxed{\sqrt{13}}$.

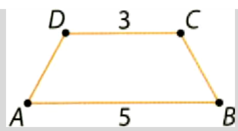
Exercice n°45 page 274 Vrai ou faux ?

Préciser si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1) On a $\|\vec{u}\| = 1$ et $\vec{u}.\vec{v} = 1$, alors $(2\vec{u} + \vec{v}).\vec{u} = 3$.

2) Si ABCD est un trapèze et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = 5$, alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 20$.

3) $2\vec{u}.(-\vec{v}) + (-\vec{u}).3\vec{v} = -5\vec{u}.\vec{v}$.



1) $(2\vec{u} + \vec{v}).\vec{u} = 2\vec{u}^2 + \vec{v}.\vec{u} = 2 \times 1^2 + 1 = 3$.

L'affirmation est $\boxed{\text{vraie}}$.

2) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC} = 5 + AB \times DC = 5 + 5 \times 3 = 20$.

L'affirmation est $\boxed{\text{vraie}}$.

3) $2\vec{u}.(-\vec{v}) + (-\vec{u}).3\vec{v} = -2\vec{u}.\vec{v} - 3\vec{u}.\vec{v} = -5\vec{u}.\vec{v}$.

L'affirmation est $\boxed{\text{vraie}}$.

Exercice n°48 page 274

On a $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 7$ et $\vec{u}.\vec{v} = 5$.

Calculer $(\vec{u} + \vec{v})^2$, $(\vec{u} - \vec{v})^2$, $(\vec{u} + \vec{v}).(\vec{u} - \vec{v})$.

- $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2 = 3^2 + 2 \times 5 + 7^2 = \boxed{68}$.
- $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2 = 3^2 - 2 \times 5 + 7^2 = \boxed{48}$.
- $(\vec{u} + \vec{v}).(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2 = 3^2 - 7^2 = \boxed{-40}$.

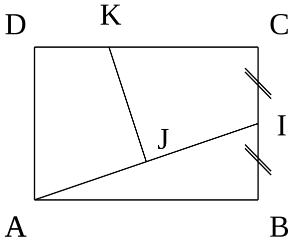
Exercice n°57 page 275

ABCD est un rectangle, avec $AB = 3a$ et $BC = 2a$; I est le milieu de [BC] et K est défini par $\overrightarrow{DK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$; J est le projeté orthogonal du point K sur la droite (AI).

1) Calculer, en fonction de a, les produits scalaires : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{KA}$.

2) En utilisant des relations de Chasles, calculer $\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{AI}$.

3) En exprimant d'une autre façon le produit scalaire $\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{AI}$, en déduire la distance AJ en fonction de a.



1) B est le projeté orthogonal de I sur (AB), alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AI} = AB^2 = \boxed{9a^2}$.

D est le projeté orthogonal de K sur (AD), alors $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{KA} = -\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AK} = -AD^2 = \boxed{-4a^2}$.

2) $\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{AI} =$
$(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DK}).(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI}) =$
$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{DK} + \overrightarrow{DK}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DK}.\overrightarrow{BI} =$
$AD \times BI + 0 + DK \times AB + 0 =$
$2a \times a + a \times 3a =$
$\boxed{5a^2}$.

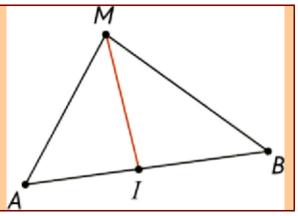
3) D'après le théorème de Pythagore dans ABI, on a $AI^2 = AB^2 + BI^2 = 9a^2 + a^2 = 10a^2$, d'où $AI = \sqrt{10}\,a$.
Comme J est le projeté orthogonal de K sur (AI), alors $\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{AI} = AJ \times AI = AJ \times \sqrt{10}\,a$.

On en déduit que : $AJ \times \sqrt{10}a = 5a^2$, soit $AJ = \dfrac{5a}{\sqrt{10}} = \dfrac{5a\sqrt{10}}{10} = \boxed{\dfrac{a\sqrt{10}}{2}}$.

3 APPLICATION AU CALCUL DE LONGUEURS ET D'ANGLES

THÉORÈME DE LA MÉDIANE

Soit A, B, M trois points du plan, et I le milieu du segment [AB].
Alors : $\mathbf{MA^2 + MB^2 = 2\,MI^2 + 2\,IA^2}$.

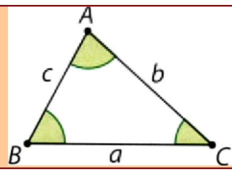


Démonstration :

$MA^2 + MB^2 = \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2$,
puis en développant à l'aide de l'identité remarquable **4)**, on obtient :
$MA^2 + MB^2 = \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA} + IA^2 + \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IB}^2 = 2\overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI}.(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) + \overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{IB}^2$.
Or $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0}$, car I est le milieu du segment [AB],
et $\overrightarrow{IA}^2 = IA^2 = IB^2 = \overrightarrow{IB}^2$; donc enfin : $MA^2 + MB^2 = 2\,MI^2 + 2\,IA^2$.
Ce théorème permet de calculer les longueurs des médianes d'un triangle quand on connaît les longueurs des trois côtés.

THÉORÈME D'AL-KASHI ou de PYTHAGORE GÉNÉRALISÉ

Soit ABC un triangle. On pose $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, alors :
$\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}}$;
$\boldsymbol{b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\widehat{B}}$;
$\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{C}}$.



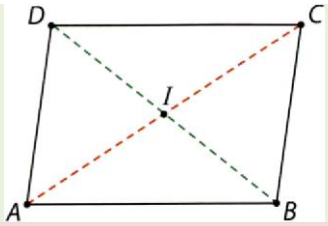
Remarques :

- Ce théorème permet de calculer les angles dans un triangle quand on connaît les trois côtés.
- Lorsque $\widehat{A} = 90°$, la relation s'écrit $a^2 = b^2 + c^2$: on retrouve le théorème de Pythagore.
- La preuve s'obtient aisément en écrivant : $a^2 = BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2$,
puis en développant comme dans la preuve du théorème de la médiane.

Exemple :

Avec BC = 7, CA = 5 et AB = 8, on peut calculer l'angle $\widehat{A}$ grâce à : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$.
On obtient : $\cos\widehat{A} = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \dfrac{5^2 + 8^2 - 7^2}{2 \times 5 \times 8} = \dfrac{40}{80} = \dfrac{1}{2}$; d'où $\widehat{A} = 60°$.

Exercice corrigé : *Calculer des longueurs et déterminer des angles*



ABCD est un parallélogramme de centre I.
On sait que AB = 7, AD = 5 et BD = 8.
1) Déterminer la longueur de la diagonale AC.
2) Déterminer les angles du parallélogramme ABCD à 1° près.
3) En déduire l'aire de ABCD.

Solution :

1) Comme les diagonales du parallélogramme se coupent en leur milieu I, on a AC = 2 AI et il suffit de calculer AI.
En appliquant le théorème de la médiane dans le triangle ABD, on a : $AB^2 + AD^2 = 2\,AI^2 + 2\,IB^2$; soit $7^2 + 5^2 = 2\,AI^2 + 2 \times 4^2$.
On obtient $AI^2 = 21$, soit $AI = \sqrt{21}$; donc $AC = 2\sqrt{21}$.

Méthode :
Pour calculer des longueurs et des angles on dispose de formules pratiques : théorème de la médiane, théorème d'Al-Kashi.
D'autres méthodes sont exposées dans l'exercice résolu 18, page 266.

2)
- Le théorème d'Al-Kashi dans le triangle BDA donne : $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2 \times AB \times AD \times \cos\widehat{BAD}$;
  soit $64 = 49 + 25 - 70\cos\widehat{BAD}$; d'où $\cos\widehat{BAD} = \dfrac{74-64}{70} = \dfrac{1}{7}$.
  Avec la calculatrice mise en mode degré, on obtient :
  $\widehat{BAD} = \cos^{-1}\left(\dfrac{1}{7}\right) \approx 81{,}8°$; d'où $\widehat{A} = \widehat{C} \approx 81{,}8°$.

Si le cosinus n'est pas une valeur remarquable, c'est la calculatrice qui donne une valeur approchée de l'angle.

- $\widehat{ADC}$ est un angle supplémentaire de $\widehat{BAD}$, donc : $\widehat{ADC} \approx 180° - 81{,}8° \approx 98{,}2°$; d'où $\widehat{D} = \widehat{B} \approx 98{,}2°$.

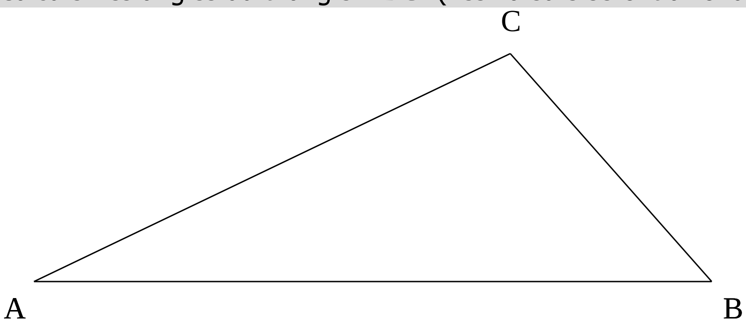
3) En appelant H le projeté orthogonal du point D sur la droite (AB), l'aire S de ABCD s'écrit : $S = AB \times DH = AB \times AD \times \sin\widehat{A}$.
Comme $\widehat{A} < 90°$, $\sin\widehat{A} = \sqrt{1-\cos^2\widehat{A}} = \sqrt{1-\dfrac{1}{49}} = \sqrt{\dfrac{48}{49}} = \dfrac{4\sqrt{3}}{7}$.
D'où l'aire cherchée $S = 7 \times 5 \times \dfrac{4\sqrt{3}}{7} = 20\sqrt{3}$ unités d'aire.

Ne pas oublier la trigonométrie du triangle rectangle, ni d'examiner le signe du sinus lorsqu'on le calcule à partir de la formule :
$\cos^2 a + \sin^2 a = 1$.

Exercice n°5 page 261

a) Construire un triangle ABC tel que AB = 9 cm, BC = 4 cm et AC = 7 cm.
b) Calculer les angles du triangle ABC. (Les valeurs seront arrondies au degré près.)

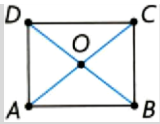
a)



b)
- D'après le théorème d'Al-Kashi, $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos\widehat{BAC}$, soit :
  $4^2 = 9^2 + 7^2 - 2 \times 9 \times 7 \times \cos\widehat{BAC}$,
  $16 = 81 + 49 - 126\cos\widehat{BAC}$
  $\cos\widehat{BAC} = \dfrac{114}{126} = \dfrac{57}{63}$
  Donc $\cos\widehat{BAC} = \dfrac{57}{63}$ et $\widehat{BAC} \approx \boxed{25°}$.
- D'après le théorème d'Al-Kashi, $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \times AB \times BC \times \cos\widehat{ABC}$, soit :
  $7^2 = 9^2 + 4^2 - 2 \times 9 \times 4 \times \cos\widehat{ABC}$
  $49 = 81 + 16 - 72\cos\widehat{ABC}$
  Donc $\cos\widehat{ABC} = \dfrac{48}{72} = \dfrac{2}{3}$ et $\widehat{ABC} \approx \boxed{48°}$.
- $\widehat{ACB} = 180° - \widehat{BAC} - \widehat{ABC} \approx 180° - 25° - 48° \approx \boxed{107°}$.

Exercice n°7 page 261

ABCD est un rectangle tel que AB = 4 et BC = 3.



a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}$. (On pourra décomposer les vecteurs sur $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AB}$ à l'aide de la relation de Chasles.)

b) Donner une valeur approchée de l'angle $\widehat{DOC}$.

a) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}).(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}) = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}).(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = AD^2 - AB^2 = 9 - 16 = \boxed{-7}$.

b) D'après le théorème de Pythagore dans ABC, on a $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$, donc AC = 5.

D'où $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = AC \times BD \times \cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}) = 5 \times 5 \times \cos \widehat{DOC} = 25 \cos \widehat{DOC}$.

On en déduit $\cos \widehat{DOC} = \dfrac{-7}{25}$ et donc $\widehat{COD} \approx \boxed{106{,}2°}$.

Exercice n°8 page 261

Dans un repère orthonormé on donne les points A(–2 ; 1), B(3 ; 0) et C(–1 ; –2).

1) Exprimer de deux façons $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$.

2) Donner une valeur approchée à 1° près de l'angle $\widehat{ABC}$.

1)
- $AB = \sqrt{(3+2)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{25+1} = \sqrt{26}$ et $BC = \sqrt{(-1-3)^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$.

  D'où $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = AB \times BC \times \cos \widehat{ABC} = \sqrt{26} \times \sqrt{20} \times \cos \widehat{ABC} = \sqrt{520} \cos \widehat{ABC} = \boxed{2\sqrt{130} \cos \widehat{ABC}}$.
- $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}-5\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-4\\-2\end{pmatrix}$, d'où $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = -5 \times (-4) + 1 \times (-2) = 20 - 2 = \boxed{18}$.

2) $\cos \widehat{ABC} = \dfrac{18}{2\sqrt{130}} = \dfrac{9}{\sqrt{130}}$ et $\widehat{ABC} \approx \boxed{38°}$.

Exercice n°4 page 284 Calculer une longueur ou déterminer un angle

→ Voir le **savoir-faire**, page 261.

Dans chacune des situations suivantes, déterminer la longueur AB et une valeur approchée de $\widehat{BAC}$.

Méthode :
Analyser le contexte (repère orthonormé, configuration, connaissance de longueurs) pour choisir une méthode et les formules adaptées à la situation (voir l'exercice résolu **18**, page 266). S'aider d'une figure !

a) Dans le repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ les points A, B et C ont pour coordonnées respectives : (–1; 1), (3 ; 2) et (1 ; –2).

a)
- On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$ et $AB = \boxed{\sqrt{17}}$.
- D'une part $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 4 \times 2 + 1(-3) = 5$.

  D'autre part $AC = \sqrt{13}$, donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC} = \sqrt{17} \times \sqrt{13} \times \cos \widehat{BAC} = \sqrt{221} \cos \widehat{BAC}$.

  On en déduit $\cos \widehat{BAC} = \dfrac{5}{\sqrt{221}}$ et donc $\widehat{BAC} \approx \boxed{70{,}35°}$.

b) $\widehat{ACB} = 45°$, BC = 8 et CA = 10.

b)
- D'après le théorème d'Al-Kashi, on a :

  $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2\, AC \times BC \times \cos \widehat{ACB}$

  $AB^2 = 10^2 + 8^2 - 2 \times 10 \times 8 \times \cos 45°$

  $AB^2 = 164 - 80\sqrt{2}$.

  D'où $AB = \sqrt{164 - 80\sqrt{2}} = \boxed{2\sqrt{41 - 20\sqrt{2}}} \approx 7{,}1$.
- D'après le théorème d'Al-Kashi, on a : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$;

  soit $8^2 = 164 - 80\sqrt{2} + 100 - 2 \times 2\sqrt{41 - 20\sqrt{2}} \times 10 \times \cos \widehat{BAC}$

  ou encore $64 = 264 - 80\sqrt{2} - 40\sqrt{41 - 20\sqrt{2}} \times \cos \widehat{BAC}$

  donc $\cos \widehat{BAC} = \dfrac{200 - 80\sqrt{2}}{40\sqrt{41 - 20\sqrt{2}}} = \dfrac{5 - 2\sqrt{2}}{\sqrt{41 - 20\sqrt{2}}}$; d'où $\widehat{BAC} \approx \boxed{52{,}5°}$.

c) B est le milieu du segment [CD] et on donne AC = CD = 9 et AD = 7.

c)
- D'après le théorème de la médiane, $AC^2 + AD^2 = 2\, AB^2 + 2\, BD^2$; soit :

  $9^2 + 7^2 = 2\, AB^2 + 2\left(\dfrac{9}{2}\right)^2$,

  $130 = 2\, AB^2 + \dfrac{81}{2}$

$2\ AB^2 = 130 - \frac{81}{2}$

$2\ AB^2 = \frac{179}{2}$

$AB^2 = \frac{179}{4}$

$AB = \boxed{\frac{\sqrt{179}}{2}}$.

- D'après le théorème d'Al-Kashi, on a : $CB^2 = AC^2 + AB^2 - 2\ AC \times AB \times \cos \widehat{BAC}$; soit :

  $\left(\frac{9}{2}\right)^2 = 9^2 + \frac{179}{4} - 2 \times 9 \times \frac{\sqrt{179}}{2} \times \cos \widehat{BAC}$

  $\frac{81}{4} = \frac{503}{4} - 9\sqrt{179} \cos \widehat{BAC}$

  $9\sqrt{179} \cos \widehat{BAC} = \frac{211}{2}$

  $\cos \widehat{BAC} = \frac{211}{18\sqrt{179}}$; d'où $\widehat{BAC} \approx \boxed{28{,}8°}$.

d) AIKJ est un carré de côté 3. Les points B et C sont définis par : $\overrightarrow{IB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{JC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AI}$.

d)

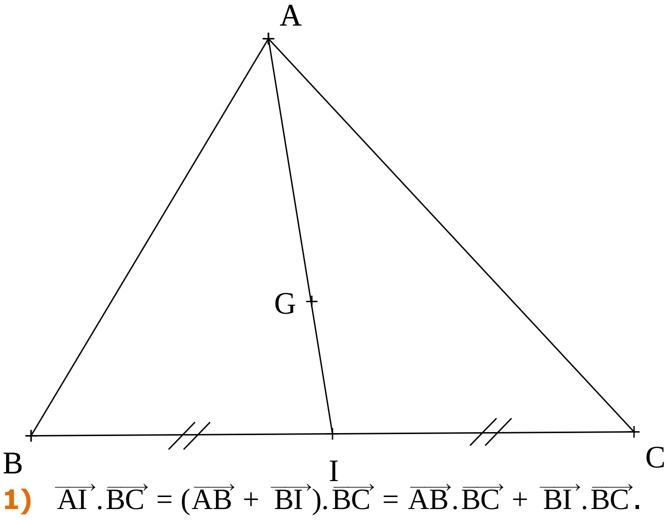
- Dans le repère orthonormé $(A\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$ tel que $\vec{i} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AI}$ et $\vec{j} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AJ}$, on obtient $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\3\end{pmatrix}$, donc $AB^2 = 10$, soit $AB = \boxed{\sqrt{10}}$.
- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 15$ et $AC = \frac{3\sqrt{5}}{2}$, donc $\cos \widehat{BAC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; d'où $\widehat{BAC} = \boxed{45°}$.

Exercice n°11 page 285

ABC est un triangle tel que AB = 6, BC = 8 et CA = 7. Le point I est le milieu du segment [BC] et G est le centre de gravité du triangle ABC.

1) Calculer $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BC}$ en utilisant la relation de Chasles et la formule d'Al-Kashi.

2) En déduire la valeur du produit scalaire $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BC}$.



1) $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI}).\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BC}$.

- D'après le théorème d'Al-Kashi, $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \times AB \times BC \times \cos \widehat{ABC}$, soit :

  $7^2 = 6^2 + 8^2 - 2 \times 6 \times 8 \times \cos \widehat{ABC}$

  $49 = 36 + 64 - 96 \cos \widehat{ABC}$

  $\cos \widehat{ABC} = \frac{51}{96}$.

- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = -AB \times BC \times \cos \widehat{ABC} = -6 \times 8 \times \frac{51}{96} = \frac{-51}{2}$.
- $\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BC} = BI \times BC = 4 \times 8 = 32$.

$\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BC} = \frac{-51}{2} + 32 = \boxed{\frac{-13}{2}}$.

2) $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}\ \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BC} = \frac{2}{3} \times \frac{-13}{2} = \boxed{\frac{-13}{3}}$.

4 ORTHOGONALITÉ

4.1 Vecteurs orthogonaux

DÉFINITION 2

On dit que deux vecteurs **$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux** lorsque $\vec{u}.\vec{v} = 0$, c'est-à-dire lorsque l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$ est droit (de mesure $\frac{+\pi}{2}$ ou $\frac{-\pi}{2}$ modulo 2π) ou bien lorsque $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$.

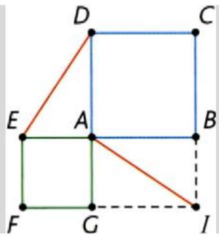
Exemple :

En repère orthonormé (O ; I, J), les vecteurs $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$ sont orthogonaux.

Il en est de même des vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ puisque : $\vec{u}.\vec{v} = 2(-1) + 1 \times 2 = 0$.

Exercice n°121 page 280

ABCD et AEFG sont deux carrés.
Démontrer que les droites (ED) et (AI) sont perpendiculaires.



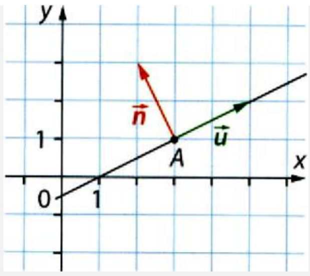
$\overrightarrow{ED}.\overrightarrow{IA} =$
$(\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AD}).(\overrightarrow{IG} + \overrightarrow{GA}) =$
$\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{IG} + \overrightarrow{EA}.\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{IG} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{GA} =$
$-AE \times GI + 0 + 0 + AD \times GA =$
0.
Donc les droites (ED) et (AI) sont perpendiculaires.

4.2 Vecteur normal à une droite

PROPRIÉTÉ ET DÉFINITION

Soit $\vec{n}$ un vecteur non nul et A un point du plan.
L'ensemble des points M du plan tels que **$\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$ est une droite $\mathcal{D}$**, passant par A, et dirigée par un vecteur $\vec{u}$ orthogonal à $\vec{n}$.
On dit que **$\vec{n}$ est un vecteur normal** à la droite $\mathcal{D}$.

Démonstration :



- $\overrightarrow{AA}.\vec{n} = \vec{0}.\vec{n} = 0$, donc A est un point de l'ensemble recherché.
- Considérons un repère orthonormé (O ; I, J) dans lequel on a :

  $A(x_A ; y_A)$, $M(x ; y)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-x_A\\y-y_A\end{pmatrix}$.

  $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$ équivaut à :
  $a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$
  $ax + by + c = 0$ avec $c = -ax_A - by_A$.

  On reconnaît l'équation d'une droite $\mathcal{D}$ de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$.
  Or $\vec{u}.\vec{n} = -ba + ab = 0$, donc $\vec{u}$ est bien orthogonal au vecteur $\vec{n}$.

CONSÉQUENCE

Soit $(a ; b)$ un couple de réels, distinct du couple $(0 ; 0)$.

Dans un repère orthonormé, le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ est normal à une droite $\mathcal{D}$ si, et seulement si, $\mathcal{D}$ admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$ où c est un réel quelconque.

Exercice n°10 page 263

Le plan est rapporté à un repère orthonormé.
On considère les points A(2 ; 2), B(6 ; 0) et C(–3 ; –3). Déterminer une équation de :
a) la hauteur issue de A dans le triangle ABC ;
b) la médiatrice du segment [AB].

a) $M(x ; y)$ appartient à la hauteur issue de A dans le triangle ABC, si, et seulement si :
$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CB} = 0$
$9(x - 2) + 3(y - 2) = 0$
$9x - 18 + 3y - 6 = 0$
$\boxed{3x + y = 8}$.

b) Soit K(4 ; 1) le milieu de [AB].
$M(x ; y)$ appartient à la médiatrice du segment [AB] si, et seulement si :
$\overrightarrow{KM}.\overrightarrow{AB} = 0$
$4(x - 2) - 2(y - 1) = 0$
$4x - 8 - 2y + 2 = 0$
$4x - 2y - 6 = 0$
$\boxed{2x - y - 3 = 0}$.

Exercice n°80 page 277

Le repère considéré est orthonormé.

On donne dans le repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 1+m \\ m+5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 2-m \\ m-4 \end{pmatrix}$ où $m \in \mathbb{R}$.

Déterminer m pour que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si :
$(1 + m)(2 - m) + (m + 5)(m - 4) = 0$
$2 - m + 2m - m^2 + m^2 - 4m + 5m - 20 = 0$
$2m - 18 = 0$
$m = \boxed{9}$.

Exercice n°84 page 277

Dans chacun des cas suivants, calculer une équation de la droite passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

a) $A(2 ; -1)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. **b)** $A(-2 ; 3)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

a) 1re méthode :
$M(x ; y)$ appartient à la droite passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$ si, et seulement si :
$\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$,
soit : $(x - 2) \times 2 + (y + 1) \times 1 = 0$,
ou encore : $2x - 4 + y + 1 = 0$,
ou enfin : $\boxed{2x + y = 3}$.

2e méthode :
La droite passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$ a une équation de type $2x + y + c = 0$.
Comme A appartient à cette droite, alors $2 \times 2 - 1 + c = 0$, soit $c = -3$.
Donc une équation recherchée est $\boxed{2x + y = 3}$.

b) 1re méthode :
De même : $(x + 2) \times 1 + (y - 3) \times (-3) = 0$,
soit : $x + 2 - 3y + 9 = 0$,
ou encore : $\boxed{x - 3y + 11 = 0}$.

2e méthode :
De même on a $x - 3y + c = 0$, et $-2 - 3 \times 3 + c = 0$,
soit $c = 11$.
Donc une équation recherchée est $\boxed{x - 3y + 11 = 0}$.

Exercice n°86 page 277

Soit d la droite d'équation $y = -x + 3$.

1) Déterminer un vecteur normal à d.

2) Déterminer une équation de la droite Δ perpendiculaire à d et passant par A(3 ; 2).

1) L'équation $y = -x + 3$ équivaut à $x + y - 3 = 0$, donc un vecteur normal à d est $\vec{n}\boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$.

2) 1re méthode :
$\overrightarrow{AM}(x ; y)$ appartient à Δ si, et seulement si :
$\overrightarrow{AM}$ colinéaire à $\vec{n}$,
soit : $(x - 3) \times 1 + (y - 2) \times 1 = 0$,
ou encore : $x - 3 + y - 2 = 0$,
ou enfin : $\boxed{x + y = 5}$.

2e méthode :
$\vec{n}$ est un vecteur directeur de Δ, alors une équation de Δ est du type $x + y + c = 0$.
Comme A appartient à cette droite, alors $3 + 2 + c = 0$, soit $c = -5$.
Une équation de Δ est donc : $x + y - 5 = 0$, ou encore $\boxed{x + y = 5}$.

Exercice n°88 page 277

Déterminer une équation de la médiatrice du segment [AB] avec $A(-2 ; 3)$ et $B(2 ; 1)$.

1re méthode :
I(0 ; 2) est le milieu de [AB].
$\overrightarrow{AM}(x ; y)$ appartient à la médiatrice de [AB] si,

2e méthode :
La médiatrice Δ a pour vecteur normal $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$, elle a une

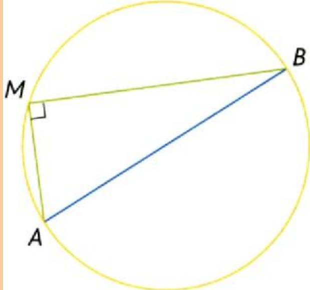
et seulement si : $\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB} = 0$,
soit : $x \times 4 + (y - 2) \times (-2) = 0$,
ou encore : $4x - 2y + 4 = 0$,
ou enfin : $\boxed{2x - y + 2 = 0}$.

équation du type $4x - 2y + c = 0$.
Δ passe par I(0 ; 2), milieu de [AB], alors $4 \times 0 - 2 \times 2 + c = 0$, soit $c = 4$.
Δ a pour équation $4x - 2y + 4 = 0$, soit encore $\boxed{2x - y + 2 = 0}$.

4.3 Équation d'un cercle de diamètre [AB]

PROPRIÉTÉ 7

Soit A et B deux points distincts du plan et (O ; I, J) un repère orthonormé.
L'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$ est le cercle $\mathcal{C}$ de diamètre [AB].
Une équation cartésienne de $\mathcal{C}$ dans le repère (O ; I, J) est :
$\mathbf{(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0}$.



Démonstration :

$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$ équivaut à :
$\overrightarrow{AM} = \vec{0}$ ou $\overrightarrow{BM} = \vec{0}$ ou $AM \times BM \times \cos \widehat{AMB} = 0$
$\overrightarrow{AM} = \vec{0}$ ou $\overrightarrow{BM} = \vec{0}$ ou $\widehat{AMB} = 90°$
M = A ou M = B ou le triangle AMB est rectangle en M
M appartient au cercle de diamètre [AB].
Dans le repère orthonormé (O ; I, J), on a $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} x - x_B \\ y - y_B \end{pmatrix}$ et :
$M \in \mathcal{C}$ équivaut à : $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$, soit à : $(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0$.

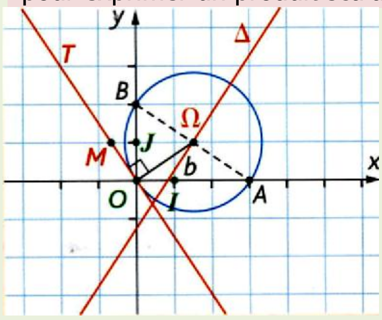
Exercice corrigé : ***Déterminer une équation de droite ou de cercle***

Dans un repère orthonormé (O ; I, J) on donne les points A(3 ; 0) et B(0 ; 2).

1) **Déterminer une équation du cercle $\mathcal{C}$ de diamètre [AB]. Justifier que $\mathcal{C}$ passe par le point O.**
2) **Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ en O.**
3) **Déterminer une équation de la médiatrice du segment [AB].**

Solution :

Méthode :
S'assurer que le repère utilisé est orthonormé ; c'est indispensable pour exprimer un produit scalaire par la formule : $xx' + yy'$.



Poser M(x ; y) le point courant de l'ensemble cherché.
Caractériser l'ensemble cherché par la nullité d'un produit scalaire.
En particulier, un cercle connu par un diamètre, une tangente, une médiatrice ou une hauteur sont définis par une relation d'orthogonalité. Cette relation se traduit par un produit scalaire nul.

1) Soit (x ; y) les coordonnées d'un point M.
$M \in \mathcal{C}$ équivaut à : $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$.
On a $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x - 3 \\ y - 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} x - 0 \\ y - 2 \end{pmatrix}$;
par suite : $M \in \mathcal{C}$ équivaut à :
$(x - 3)(x) + (y)(y - 2) = 0$.
Le cercle $\mathcal{C}$ a pour équation :
$x^2 + y^2 - 3x - 2y = 0$.
Les coordonnées (0 ; 0) du point O vérifient l'équation du cercle, donc O appartient au cercle de diamètre [AB].

2) On appelle T la tangente à $\mathcal{C}$ en O et Ω le milieu du segment [AB], centre du cercle $\mathcal{C}$, dont les coordonnées sont $\left(\frac{3}{2}\,,\,1\right)$.

$\overrightarrow{O\Omega}\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à T et par suite :

$M \in T$ équivaut à : $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{O\Omega} = 0$, soit à : $3x + y = 0$, ou encore à : $4y = \frac{-3}{2}\,x$.

3) Soit Δ la médiatrice du segment [AB]. La droite Δ a pour vecteur normal $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$; elle a donc une équation de la forme : $-3x + 2y + c = 0$.
D'autre part le point Ω appartient à Δ, ce qui se traduit par :

En repère orthonormé, dès qu'on tonnait un vecteur normal à une droite, on peut en déduire les coefficients de x et de y dans une équation

$-3\left(\frac{3}{2}\right) + 2 + c = 0$ équivalent à : $c = \frac{5}{2}$.

Une équation de Δ est donc : $-3x + 2y + \frac{5}{2} = 0$.

cartésienne de cette droite.

Exercice n°12 page 263

Le plan est rapporté à un repère orthonormé.

1) Déterminer une équation du cercle de centre $A(2 ; 3)$ et de rayon 3.

2) Déterminer l'ensemble des points $M(x ; y)$ du plan tels que : $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$.

1) $M(x ; y)$ appartient au cercle si, et seulement si, $AM^2 = 9$, soit $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 9$;

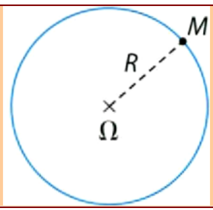
donc on obtient : $\boxed{x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0}$.

2) L'équation s'écrit : $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 16$; c'est $\boxed{\text{le cercle de centre } K(2 , -3) \text{ et de rayon } 4}$.

4.4 Équation d'un cercle défini par son centre et son rayon

PROPRIÉTÉ 8

Soit Ω un point du plan, R un réel strictement positif et (O ; I, J) un repère orthonormé.
Le cercle $\mathcal{C}$ de centre Ω et de rayon R est l'ensemble des points M du plan tels que $\mathbf{\Omega M = R}$, ou encore $\Omega M^2 = R^2$.
Une équation cartésienne de $\mathcal{C}$ dans (O ; I, J) est : $\mathbf{(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = R^2}$.



Exemple :

Dans un repère orthonormé, le cercle de centre $\Omega(-2 ; 5)$ et de rayon 3 a pour équation cartésienne :
$(x+2)^2 + (y-5)^2 = 3^2$ qui équivaut à :
$x^2 + 4x + 4 + y^2 - 10y + 25 = 9$
$x^2 + y^2 + 4x - 10y + 20 = 0$.

RESTE A FAIRE

Exercice n°13 page 263

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
Déterminer les éventuels points d'intersection entre le cercle de centre $A(3 ; 1)$ passant par O et la droite d d'équation $x + y - 2 = 0$.

- Le rayon du cercle est : $OA = \sqrt{(0-3)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$.
- $M(x ; y)$ appartient au du cercle de centre A passant par O si, et seulement si : $AM^2 = OA^2$,
  soit : $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 10$, ou encore : $x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 = 10$, ou enfin : $x^2 + y^2 - 6x - 2y = 0$.
- Les points communs au cercle et à la droite d, s'ils existent ont leurs coordonnées solution des systèmes équivalents :
  $\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 2y = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2 + (2-x)^2 - 6x - 2(2-x) = 0 \\ y = 2 - x \end{cases}$; $\begin{cases} x^2 + 4 - 4x + x^2 - 6x - 4 + 2x = 0 \\ y = 2 - x \end{cases}$;
  $\begin{cases} 2x^2 - 8x = 0 \\ y = 2 - x \end{cases}$; $\begin{cases} x(x-4) = 0 \\ y = 2 - x \end{cases}$; $\begin{cases} x = 0 \text{ ou } x = 4 \\ y = 2 - x \end{cases}$; $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = 4 \\ y = -2 \end{cases}$.
  On trouve deux points d'intersection : $\boxed{C(0 , 2)}$ et $\boxed{D(4 , -2)}$.

Exercice n°5 page 285 **Déterminer une équation de droite ou de cercle**

→ Voir le **savoir-faire**, page 263.

Méthode :

Pour tous les ensembles qui peuvent être caractérisés par une condition d'orthogonalité ou de distance, on obtient aisément une équation en écrivant :
- soit la nullité d'un produit scalaire ;
- soit l'égalité vérifiée par une norme.

Il faut toutefois se placer dans un repère orthonormé.

Dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ on donne la droite $\mathcal{D}$ d'équation $2x - 5y + 3 = 0$ et le point $A(-1 ; 6)$.

1) Déterminer un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

2) Déterminer une équation de la perpendiculaire à $\mathcal{D}$ passant par le point A.

3) Déterminer une équation du cercle Γ de diamètre [AB] avec $B(1 ; 1)$.

4) Justifier que Γ et $\mathcal{D}$ a sont tangents.

1) La droite $\mathcal{D}$ a pour vecteur directeur $\boxed{\vec{u}\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}}$.

2) La perpendiculaire Δ à $\mathcal{D}$ passant par le point A a $\vec{u}$ pour vecteur normal.

1re méthode :

M(x ; y) appartient à Δ si, et seulement si :
$\overrightarrow{AM}.\vec{u} = 0$,
soit $(x + 1) \times 5 + (y - 6) \times 2 = 0$,
ou encore : $5x + 5 + 2y - 12 = 0$,
ou enfin : $\boxed{5x + 2y = 7}$.

2e méthode :
Δ a une équation du type $5x + 2y + c = 0$.
A(-1 ; 6) appartient à Δ, alors $5(-1) + 2 \times 6 + c = 0$,
soit $c = -7$.
Δ a pour équation $\boxed{5x + 2y = 7}$.

3) M(x ; y) $\in \Gamma$ équivaut à : $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$, soit $(x + 1)(x - 1) + (y - 6)(y - 1) = 0$, ou aussi $x^2 + y^2 - 7y + 5 = 0$.

Le cercle de diamètre [AB] a pour équation $\boxed{x^2 + y^2 - 7y + 5 = 0}$.

4) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}.\vec{u} = 2 \times 5 + (-5) \times 2 = 10 - 10 = 0$.

(AB) est perpendiculaire à $\mathcal{D}$ en B, donc Γ et $\mathcal{D}$ sont tangents.

Exercice n°12 page 263

Le plan est rapporté à un repère orthonormé.
3) Déterminer une équation du cercle de centre A(2 ; 3) et de rayon 3.
4) Déterminer l'ensemble des points M(x ; y) du plan tels que : $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3= 0$.

3) M(x ; y) appartient au cercle si, et seulement si, $AM^2 = 9$, soit $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 9$;

donc on obtient : $\boxed{x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0}$.

4) L'équation s'écrit : $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$; c'est $\boxed{\text{le cercle de centre K}(2 , -3) \text{ et de rayon } 4}$.

Exercice n°6 page 285

On considère les points A(-1 ; 1), B(0 ; 3) et C(3 ; -1), dans un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$).
1) Démontrer que le triangle ABC est rectangle.
2) Déterminer une équation du cercle circonscrit au triangle ABC.
3) Déterminer une équation de la tangente à ce cercle en A.

1) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 1 \times 4 + 2(-2) = 4 - 4 = 0$.

Le triangle ABC est rectangle en A.

2) Comme ABC est rectangle en A, alors son cercle circonscrit a pour diamètre [BC].

1re méthode :

M(x ; y) appartient au cercle circonscrit à ABC si, et seulement si : $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{CM} = 0$,
soit : $x(x - 3) + (y - 3)(y + 1) = 0$,
ou encore : $\boxed{x^2 + y^2 - 3x - 2y = 3}$.

2e méthode :
Le centre du cercle est le milieu I de [BC] et a pour coordonnées $\left(\frac{3}{2} , 1\right)$, son rayon est $\frac{BC}{2} = \frac{\sqrt{9 + 16}}{2} = \frac{5}{2}$.

D'où son équation : $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2$,

soit $x^2 - 3x + \frac{9}{4} + y^2 - 2y + 1 = \frac{25}{4}$, ou aussi $\boxed{x^2 + y^2 - 3x - 2y = 3}$.

3) M(x ; y) appartient à la tangente à ce cercle en A si, et seulement si, $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AI} = 0$, soit :

$(x + 1) \times \frac{5}{2} + (y - 1) \times 0 = 0$, ou encore : $x + 1 = 0$.

Une équation de la tangente à ce cercle en A est $\boxed{x = -1}$.

Exercice n°7 page 285

Dans un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$), on considère l'ensemble $\mathcal{C}$ d'équation : $x^2 + y^2 - 2x + 3y = 0$.

Démontrer que $\mathcal{C}$ est un cercle dont on déterminera le rayon et les coordonnées du centre Ω.

$x^2 + y^2 - 2x + 3y = 0$ équivaut à : $(x - 1)^2 - 1 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} = 0$, soit : $(x - 1)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2$.

$\mathcal{C}$ est le cercle de centre $\Omega\boxed{\left(1 , \frac{-3}{2}\right)}$ et de rayon $\boxed{\frac{\sqrt{13}}{2}}$.

Exercice n°10 page 285

Dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, on considère la droite $\mathcal{D}$ d'équation $x + 2y - 5 = 0$ et le point $A\left(-2 , \frac{-3}{2}\right)$.

Déterminer une équation du cercle de centre A tangent à $\mathcal{D}$.

- La droite $\mathcal{D}$ a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

  Le cercle $\mathcal{C}$ de centre A est tangent à $\mathcal{D}$ en H tel que $(AH) \perp \mathcal{D}$, soit $\overrightarrow{AH}.\vec{u} = 0$, ou encore :

  $(x_H + 2) \times 2 + \left(y_H + \frac{3}{2}\right) \times (-1) = 0$

  $2x_H - y_H + \frac{5}{2} = 0$

  $4x_H - 2y_H + 5 = 0.$

  Les coordonnées de H sont donc les solutions du système : $\begin{cases} x + 2y - 5 = 0 \\ 4x - 2y + 5 = 0 \end{cases}$, soit : $\begin{cases} 5x = 0 \\ x + 2y - 5 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{5}{2} \end{cases}$.

- Le rayon du cercle de centre A tangent à $\mathcal{D}$ est $AH = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

- Une équation du cercle de centre A tangent à $\mathcal{D}$ est donc : $(x + 2)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = (2\sqrt{5})^2$, soit :

  $x^2 + 4x + 4 + y^2 + 3y + \frac{9}{4} = 20$, ou encore $\boxed{x^2 + y^2 + 4x + 3y = \frac{55}{4}}$.

Exercice n°92 page 278

Déterminer une équation du cercle :

a) de diamètre [AB] si A(2 ; 2) et B(6 ; 8) ; **b)** de centre A(5 ; 2) et passant par O.

a) En écrivant que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$ on obtient : $(x - 2)(x - 6) + (y - 2)(y - 8) = 0$, soit : $\boxed{x^2 + y^2 - 8x - 10y + 28 = 0}$.

b) Le cercle a pour rayon OA. On obtient : $\boxed{x^2 + y^2 - 10x - 4y = 0}$.

Exercice n°97 page 278

Déterminer l'ensemble des points $M(x ; y)$ du plan tels que $x^2 + y^2 + x - 2y = 0$.

Coupe de pouce : On mettra l'équation sous la forme $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$.

$x^2 + y^2 + x - 2y = 0$ équivaut à : $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + (y - 1)^2 - 1 = 0$, soit : $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 = \frac{5}{4}$.

L'ensemble cherché est le $\boxed{\text{cercle de centre } I\left(\frac{-1}{2} , 1\right) \text{ et de rayon } R = \frac{\sqrt{5}}{2}}$.

Exercice n°98 page 278

On considère le cercle d'équation : $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 5 = 0$.

1) Déterminer son centre et son rayon.

2) Déterminer les points d'intersection de ce cercle avec l'axe des abscisses.

1) $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 5 = 0$ équivaut à : $(x - 2)^2 - 4 + (y + 1)^2 - 1 - 5 = 0$, soit : $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 10$.

Le cercle a pour centre est $\boxed{I(2 , -1)}$ et pour rayon $\boxed{\sqrt{10}}$.

2) Pour $y = 0$, l'équation du cercle devient : $x^2 - 4x - 5 = 0$.

$\Delta = 16 + 20 = 36$, cette équation admet deux solutions $\frac{4 - 6}{2} = -1$ et $\frac{4 + 6}{2} = 5$.

Le cercle coupe l'axe des abscisses en $\boxed{A(-1 , 0)}$ et $\boxed{B(5 , 0)}$.

5 APPLICATION AUX FORMULES DE TRIGONOMÉTRIE

5.1 Formules d'addition du cosinus et du sinus

PROPRIÉTÉS 9

Pour tous réels a et b on a les formules :

1) $\cos (a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ **3)** $\sin (a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$

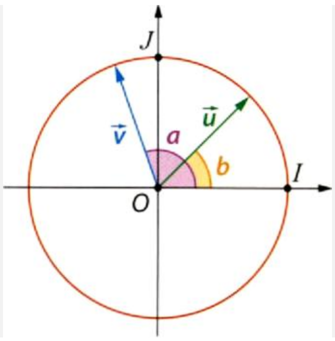
2) $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ **4)** $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

Démonstration de la formule 1) :

On considère un repère orthonormé direct $(O ; I, J)$ et deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, de norme 1, tels que : $(\overrightarrow{OI}, \vec{u}) = b\ (2\pi)$ et $(\overrightarrow{OI}, \vec{v}) = a\ (2\pi)$.

- On a $\vec{u}\begin{pmatrix}\cos b\\ \sin b\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\cos a\\ \sin a\end{pmatrix}$, alors $\vec{u}.\vec{v} = \cos b \cos a + \sin b \sin a$.
- Par la relation de Chasles on sait que :
  $(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, \overrightarrow{OI}) + (\overrightarrow{OI}, \vec{v}) = (\overrightarrow{OI}, \vec{v}) - (\overrightarrow{OI}, \vec{u}) = a - b\ (2\pi)$
  d'où $\vec{u}.\vec{v} = 1 \times 1 \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \cos(a-b)$.

On obtient l'égalité : $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.



Exemple :

$$\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}.$$

Exercice n°14 page 265

En remarquant que $\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{12}$, déterminer les lignes trigonométriques de $\frac{7\pi}{12}$, puis celles de $\frac{5\pi}{12}$.

$$\cos\frac{7\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = \boxed{\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}}.$$

$$\sin\frac{7\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2} = \boxed{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}.$$

Comme $\frac{5\pi}{12} = \pi - \frac{7\pi}{12}$, on a $\cos\frac{5\pi}{12} = -\cos\frac{7\pi}{12} = \boxed{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$ et $\sin\frac{5\pi}{12} = \sin\frac{7\pi}{12} = \boxed{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$.

Exercice n°15 page 265

Soit x un réel. Démontrer que : $\cos x + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = 0$.

Calculer de même : $\sin x + \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \frac{4\pi}{3}\right)$.

- $S = \cos x + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right)$

  $S = \cos x + \frac{-1}{2}\cos x - \sin\frac{2\pi}{3}\sin x + \frac{-1}{2}\cos x - \sin\frac{4\pi}{3}\sin x.$

  Or $\sin\frac{4\pi}{3} = -\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$;

  d'où $S = \cos x - \cos x = 0$.
- $S' = \sin x + \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \frac{4\pi}{3}\right)$

  $S' = \sin x + \frac{-1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x + \frac{-\sqrt{3}}{2}\cos x.$

  $S' = \sin x - \sin x = \boxed{0}$.

5.2 Formules de duplication du cosinus et du sinus

PROPRIÉTÉS 10

Pour tout réel a on a les formules :

1) $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$ **3)** $\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$

2) $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$ **4)** $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$.

Piste de démonstration :

Écrire $\cos 2a = \cos(a + a)$, puis utiliser : $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$ pour **2)** et **3)**.

Remarque :

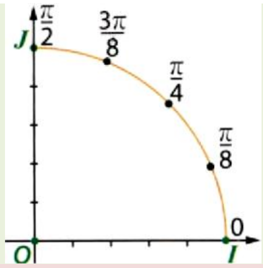
Il peut être utile dans certains cas, de savoir inverser les formules avec $\cos 2a$:

$\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$ et $\sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}$.

Exercice corrigé : *Utiliser les formules de duplication et d'addition*

1) En remarquant que $2 \times \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$ déterminer : a) $\cos \frac{\pi}{8}$; b) $\sin \frac{\pi}{8}$.

2) En déduire les valeurs de : a) $\cos \frac{3\pi}{8}$ b) $\sin \frac{3\pi}{8}$.



Solution :

1) a) En utilisant la formule de duplication du cosinus,

$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$ et en posant $a = \frac{\pi}{8}$, on obtient :

$\cos \frac{\pi}{4} = 2\cos^2 \frac{\pi}{8} - 1$;

soit : $\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\cos^2 \frac{\pi}{8} - 1$. Donc : $\cos^2 \frac{\pi}{8} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$.

Comme $0 < \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{2}$, on a $\cos \frac{\pi}{8} > 0$ et donc : $\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

Méthode :
$\cos 2a$ s'exprime au choix en fonction de $\sin a$ ou $\cos a$.
C'est utile lorsqu'on veut écrire une expression en fonction d'une seule ligne trigonométrique.

b) Pour obtenir $\sin \frac{\pi}{8}$ on utilise : $\sin \frac{\pi}{4} = 2 \sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8}$.

d'où : $\sin \frac{\pi}{8} = \dfrac{\sin \frac{\pi}{4}}{2\cos \frac{\pi}{8}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2+\sqrt{2}}}$.

Attention ! Deux résultats peuvent se présenter sous des formes très différentes, mais être identiques :
Ainsi, en multipliant « haut et bas » par $\sqrt{2-\sqrt{2}}$ on obtient : $\sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

2) a) $\frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$. En utilisant les formules d'addition, on obtient :

$\cos \frac{3\pi}{8} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = \cos \frac{\pi}{2} \times \cos \frac{\pi}{8} + \sin \frac{\pi}{2} \times \sin \frac{\pi}{8}$.

soit : $\cos \frac{3\pi}{8} = 0 \times \cos \frac{\pi}{8} + 1 \times \sin \frac{\pi}{8}$; d'où $\cos \frac{3\pi}{8} = \sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

Remarque : On retrouve la formule déjà vue pour les angles associés : $\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin a$.

b) De la même façon, on écrit : $\sin \frac{3\pi}{8} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = \sin \frac{\pi}{2} \times \cos \frac{\pi}{8} - \sin \frac{\pi}{8} \times \cos \frac{\pi}{2}$;

et on obtient : $\sin \frac{3\pi}{8} = \cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

Exercice n°16 page 265

En utilisant les formules de duplication et d'addition, exprimer $\cos 3x$ en fonction de $\cos x$, et $\sin 3x$ en fonction de $\sin x$.

- On a : $\cos 3x = \cos(2x + x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x$, donc comme $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ et $\sin 2x = 2 \cos x \sin x$, on a alors :
  $\cos 3x =$
  $(2\cos^2 x - 1)\cos x - 2 \sin x \cos x \sin x =$
  $2\cos^3 x - \cos x\,(1 + 2\sin^2 x)$
  et enfin comme $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ on obtient : $\cos 3x = \boxed{4\cos^3 x - 3\cos x}$.
- De même, on obtient : $\sin 3x = \boxed{-4\sin^3 x + 3 \sin x}$.

Exercice n°17 page 265

Soit x un réel de $\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right]$ vérifiant : $\sin x = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

1) Montrer que $\cos 2x = \frac{-\sqrt{3}}{2}$.

2) En déduire la valeur de $2x$, puis celle de x, et calculer $\cos x$.

1) $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = 1 - 2 \times \frac{6 + 2\sqrt{12} + 2}{16} = 1 - \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$.

2) Comme $2x \in [0 ; \pi]$ et $\cos 2x = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}$, alors $2x = \boxed{\dfrac{5\pi}{6}}$ et $x = \boxed{\dfrac{5\pi}{12}}$.

Enfin comme $x \in \left[0 , \dfrac{\pi}{2}\right]$, alors :

$$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - \frac{6 + 2\sqrt{12} + 2}{16}} = \sqrt{\frac{8 - 2\sqrt{12}}{16}} = \sqrt{\frac{8 - 4\sqrt{3}}{16}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}} = \boxed{\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}} = \boxed{\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}}.$$

Exercice n°20 page 267 *Résoudre une équation trigonométrique*

Résoudre dans $[0 ; 2\pi]$ l'équation $\cos 2x = \sin x$.

- $\cos 2x = \sin x$ équivaut à :

  $1 - 2 \sin^2 x = \sin x$

  $2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$

  $2X^2 + X - 1 = 0$ en posant $\sin x = X$.

  Cette équation du second degré a pour discriminant $\Delta = 1 + 8 = 9$ et donc deux solutions réelles : $X_1 = \dfrac{-1 + 3}{4} = \dfrac{1}{2}$ et $X_2 = \dfrac{-1 - 3}{4} = -1$.

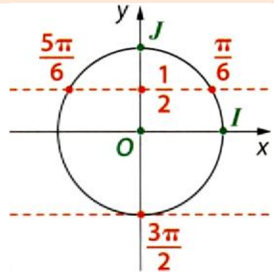
  Il suffit donc de résoudre dans $[0 ; 2\pi]$: $\sin x = \dfrac{1}{2}$ ou $\sin x = -1$.

  $\sin x = \dfrac{1}{2}$ et $x \in [0 ; 2\pi]$ équivaut à : $x = \dfrac{\pi}{6}$ ou $x = \dfrac{5\pi}{6}$.

  $\sin x = -1$ et $x \in [0 ; 2\pi]$ équivaut à : $x = \dfrac{3\pi}{2}$.

  L'ensemble des solutions de l'équation $\cos 2x = \sin x$ est $\left\{\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{3\pi}{2}\right\}$.

- On ramène l'équation trigonométrique à une équation du second degré d'inconnue « $\sin x$ » en choisissant la formule de duplication adéquate, ici : $\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$.
- On « lit » les solutions sur le cercle trigonométrique.



Exercice n°24 page 271 Q.C.M.

Pour chacune des questions suivantes, **au moins une réponse est correcte**.

1) Dans un repère orthonormé, $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ alors $\vec{u}.\vec{v} =$	**a)** 6	**b)** 3	**c)** 2

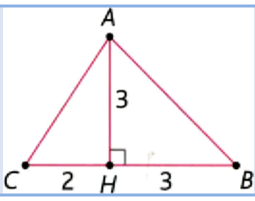
1) $\boxed{\text{c}}$.

2) Dans un repère orthonormé, $\lVert\vec{u} + \vec{v}\rVert = 5$, $\lVert\vec{u}\rVert = 2$ et $\lVert\vec{v}\rVert = 4$ alors :	**a)** $\vec{u}.\vec{v} = \dfrac{5}{2}$	**b)** $\lVert\vec{u} - \vec{v}\rVert = 5$	**c)** $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{1}{4}$

2) $\boxed{\text{a}}$.

3) ABCD est un losange de centre O alors : $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{DC} =$	**a)** $\dfrac{AO^2}{2}$	**b)** $\dfrac{AC^2}{4}$	**c)** $\dfrac{-AC^2}{4}$

3) $\boxed{\text{c}}$.

4) Dans le triangle ABC suivant : 	**a)** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 3$	**b)** $AB = 5$	**c)** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} = 9$

4) $\boxed{\text{a et c}}$.

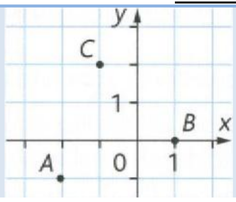
5) Si ABC est un triangle et I le milieu du segment [BC], alors :	**a)** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 2\,AI^2 + BC^2$	**b)** $AB^2 - AC^2$	**c)** $AB^2 + AC^2 = BC^2$

5) $\boxed{\text{b}}$.

6) Si $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$, alors :	**a)** $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$	**b)** $C = D$	**c)** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0$

6) $\boxed{\text{c}}$.

Dans les questions **7)**, **8)** et **9)**, on se place dans un repère orthonormé $(O ; I, J)$.

7) 	**a)** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 6$	**b)** $\cos \widehat{A} = \frac{2}{5}$	**c)** $\cos \widehat{A} = \frac{3}{5}$

7) $\boxed{\text{a et c}}$.

8) Une équation de la droite passant par A(3 ; 2) et perpendiculaire à la droite d d'équation $2x + y - 3 = 0$ est :	**a)** $2x + y - 8 = 0$	**b)** $x - 2y + 2 = 0$	**c)** $x - 2y + 1 = 0$

8) $\boxed{\text{c}}$.

9) A(–1 ; –2), B(3 ; 0). Soit $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre [AB].	**a)** $\mathscr{C}$ a pour équation $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 3 = 0$	**b)** $D(0 ; 1) \in \mathscr{C}$	**c)** $\mathscr{C}$ a pour équation $x^2 + y^2 - 2y - 9 = 0$

9) $\boxed{\text{a et b}}$.

Exercice n°25 page 271 Vrai ou faux ?

Préciser si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1) Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.
2) Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs tels que $\vec{u} + \vec{v}$ et $\vec{u} - \vec{v}$ sont orthogonaux, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont la même norme.
3) A et B sont deux points distincts du plan. L'ensemble des points M du plan tels que $MA^2 - MB^2 = 0$ est un cercle.
4) Dans un repère orthonormé, le cercle d'équation $x^2 + y^2 - 6x - 2y - 6 = 0$ et la droite d'équation $y = x + 2$ sont tangents.
5) Si $\cos a = \frac{1}{2}$ alors $\cos 2a = \frac{-1}{2}$.
6) Pour tout réel x, $\cos^4 x \sin^4 x = \cos 2x$.

1) $\boxed{\text{Faux}}$.
2) $\boxed{\text{Vrai}}$.
3) $\boxed{\text{Faux}}$.
4) $\boxed{\text{Faux}}$.
5) $\boxed{\text{Vrai}}$.
6) $\boxed{\text{Vrai}}$.

Exercice n°108 page 279 Q.C.M.

Déterminer **la** bonne réponse.

1) Si $\sin x = \frac{1}{7}$, alors :

a) $\sin 2x = \frac{4\sqrt{3}}{9}$. **b)** $\cos x = \frac{6}{7}$. **c)** $\cos 2x = \frac{47}{49}$.

2) $\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) =$

a) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. **b)** $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. **c)** $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4}$.

1) $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \frac{1}{49} = \frac{48}{49}$, d'où $\cos x = \sqrt{\frac{48}{49}} = \frac{4\sqrt{3}}{7}$ ou $\cos x = \frac{-4\sqrt{3}}{7}$.

$\sin 2x = 2 \cos x \sin x = \pm 2 \frac{4\sqrt{3}}{7} \times \frac{1}{7} = \frac{\pm 8\sqrt{3}}{49}$.

$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x = 1 - 2 \times \left(\frac{1}{7}\right)^2 = 1 - \frac{2}{49} = \frac{47}{49}$.

Réponse $\boxed{\text{c}}$.

2) $\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{6} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Réponse $\boxed{\text{b}}$.

Exercice n°111 page 279

On donne $\cos x = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ et $x \in \left[\dfrac{-\pi}{2}\,,0\right]$.

1) Démontrer que $\sin x = \dfrac{-\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, puis calculer $\sin 2x$ et $\cos 2x$.

2) En déduire la valeur exacte de $2x$, puis celle de x.

1)
- On a : $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \dfrac{2-\sqrt{2}}{4} = \dfrac{2+\sqrt{2}}{4}$ et $x \in \left[\dfrac{-\pi}{2}\,,0\right]$ donc $\sin x = \dfrac{-\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.
- $\sin 2x = 2\sin x \cos x = \boxed{\dfrac{-\sqrt{2}}{2}}$.
- $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 2 \times \dfrac{2-\sqrt{2}}{4} - 1 = \boxed{\dfrac{-\sqrt{2}}{2}}$.

2) On en déduit que $2x = \boxed{\dfrac{-3\pi}{4}}$, car $2x \in [-\pi\,;0]$, puis $x = \boxed{\dfrac{-3\pi}{8}}$.

Exercice n°17 page 265

Soit x un réel de $\left[0\,,\dfrac{\pi}{2}\right]$ vérifiant : $\sin x = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

1) Montrer que $\cos 2x = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}$.

2) En déduire la valeur de $2x$, puis celle de x, et calculer $\cos x$.

1) $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = 1 - 2\left(\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2 = 1 - 2 \times \dfrac{6+2\sqrt{12}+2}{16} = 1 - \dfrac{8+4\sqrt{3}}{8} = 1 - \left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}$.

2) Comme $2x \in [0\,;\pi]$ et $\cos 2x = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}$, alors $2x = \boxed{\dfrac{5\pi}{6}}$ et $x = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{5\pi}{6} = \boxed{\dfrac{5\pi}{12}}$.

Enfin comme $x \in \left[0\,,\dfrac{\pi}{2}\right]$, alors $\cos x > 0$ et donc :

$$\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{1-\frac{6+2\sqrt{12}+2}{16}} = \sqrt{\frac{8-2\sqrt{12}}{16}} = \sqrt{\frac{8-4\sqrt{3}}{16}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \boxed{\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}} = \boxed{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}.$$

Exercice n°8 page 285 Utiliser les formules de duplication

→ Voir le **savoir-faire**, page 265.

1) En remarquant que $2 \times \dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\pi}{6}$ déterminer les lignes trigonométriques de $\dfrac{\pi}{12}$.

2) En déduire les valeurs de $\cos\dfrac{11\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{11\pi}{12}$.

1) On a $\cos\dfrac{\pi}{6} = \cos\left(2 \times \dfrac{\pi}{12}\right) = 2\cos^2\dfrac{\pi}{12} - 1$,

donc $\cos^2\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+1\right) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+1\right) = \dfrac{2+\sqrt{3}}{4}$; or $\cos\dfrac{\pi}{12} > 0$, donc $\cos\dfrac{\pi}{12} = \boxed{\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}}$.

Comme $\sin\dfrac{\pi}{12} > 0$, on en déduit $\sin\dfrac{\pi}{12} = \sqrt{1-\cos^2\dfrac{\pi}{12}} = \sqrt{1-\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}} = \sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}} = \boxed{\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}}$.

2) $\cos\dfrac{11\pi}{12} = \cos\left(\pi - \dfrac{\pi}{12}\right) = -\cos\dfrac{\pi}{12} = \boxed{\dfrac{-\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}}$.

$\sin\dfrac{11\pi}{12} = \sin\left(\pi - \dfrac{\pi}{12}\right) = \sin\dfrac{\pi}{12} = \boxed{\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}}$.