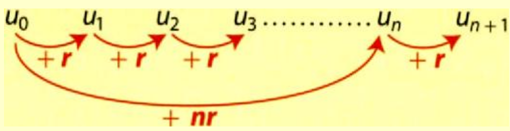
Ch.11 : Suites arithmétiques et géométriques

Dans tout le chapitre, les entiers considérés sont naturels.

1. SUITES ARITHMÉTIQUES

DÉFINITION 1

On dit qu'une suite u est **arithmétique** si, à partir de son premier terme, chaque terme est obtenu en ajoutant au précédent un même nombre.
Ainsi, il existe un réel r tel que pour tout entier n, $\boldsymbol{u_{n+1} = u_n + r}$.
Le nombre r est appelé **raison de la suite arithmétique u** ; il est égal à la différence entre deux termes consécutifs quelconques :
pour tout entier n, $\boldsymbol{r = u_{n+1} - u_n}$.



Exemples :

1) La suite $\{1 ; 3 ; 5 ; 7 ; \ldots\}$ des entiers impairs, de terme général $u_n = 2n + 1$, est une suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 2.

2) La suite v de terme général $v_n = n^2$ n'est pas une suite arithmétique.
En effet, $v_0 = 0$; $v_1 = 1$; $v_2 = 4$, … : pour passer d'un terme au suivant, on n'ajoute pas toujours le même nombre.

THÉORÈME 1

Soit u une suite arithmétique de raison r.
Alors pour tout entier n, $\boldsymbol{u_n = u_0 + n \times r}$.
Plus généralement, pour tous entiers p et k, $\boldsymbol{u_p = u_k + (p - k) \times r}$.

Démonstration :

À partir de u_0 , on obtient u_n en ajoutant n fois la raison : $u_n = u_0 + r + r + \ldots + r = u_0 + n \times r$.
On a alors $u_p = u_0 + p \times r$ et $u_k = u_0 + k \times r$.
Donc $u_p - u_k = u_0 + p \times r - u_0 - k \times r = (p - k) \times r$, soit $u_p = u_k + (p - k)\, r$.

THÉORÈME 2

Soit u une suite arithmétique de raison r.

- **Si $\boldsymbol{r > 0}$**, la suite u est **strictement croissante**.
- **Si $\boldsymbol{r < 0}$**, la suite u est **strictement décroissante**.
- **Si $\boldsymbol{r = 0}$**, la suite u est **constante**.

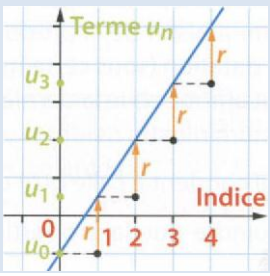
Démonstration :

Voir la démonstration à l'exercice 35, page 183.
La démonstration du théorème est très simple : r est égal à la différence entre deux termes consécutifs quelconques.

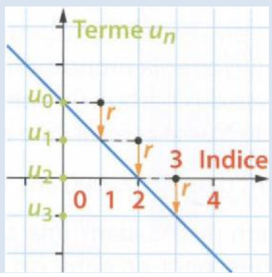
Illustration :

Graphiquement, les points de coordonnées $(n ; u_n)$ appartiennent à la droite d'équation $y = u_0 + rx$. Son coefficient directeur est r.

Si $r > 0$, la fonction affine $x \longmapsto u_0 + rx$ est croissante : les termes sont de plus en plus grands.



Si $r < 0$, la fonction affine $x \longmapsto u_0 + rx$ décroissante : les termes sont de plus en plus petits.



Exercice corrigé : ***Démontrer qu'une suite est, ou n'est pas, arithmétique***

Les suites suivantes sont-elles arithmétiques ? Si oui, déterminer le premier terme et la raison.

1) Pour tout entier $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{u_n = 7 - 4n}$.

2) Pour tout entier $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{v_n = n^2 - 1}$.

3) Pour tout entier $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{w_n = (n + 1)^2 - n^2}$.

Solution :

1) $u_0 = 7 - 4 \times 0 = 7$; $u_1 = 7 - 4 \times 1 = 3$; $u_2 = 7 - 4 \times 2 = -1$.

Méthode :

- Avant toute chose, calculer les trois

Il semble que la différence entre deux termes consécutifs soit –4, donc indépendante de n.
Pour tout entier n : $u_{n+1} - u_n = [7 - 4(n+1)] - (7 - 4n) = 4$.
La suite u est arithmétique de premier terme $u_0 = 7$ et de raison –4.

2) $v_0 = 0^2 - 1 = -1$; $v_1 = 1^2 - 1 = 0$; $v_2 = 2^2 - 1 = 3$.
On a $v_1 - v_0 = 1$ différent de $v_2 - v_1 = 3$.
Donc la suite v n'est pas arithmétique.

premiers termes de la suite pour conjecturer le résultat.

- Pour démontrer qu'une suite u est arithmétique, on prouve que la différence $u_{n+1} - u_n$ est constante, c'est-à-dire indépendante de n.
- Pour démontrer qu'une suite u n'est pas arithmétique, il suffit de trouver un exemple montrant que la différence entre deux termes consécutifs n'est pas constante.

3) On a $w_0 = 1$; $w_1 = 3$; $w_2 = 5$: la différence entre deux termes consécutifs semble constante et égale à 2.
Pour tout entier n : $w_{n+1} - w_n = [(n+2)^2 - (n+1)^2] - [(n+1)^2 - n^2]$.
En développant, on trouve : $w_{n+1} - w_n = 2$.
Donc la suite w est arithmétique de premier terme $w_0 = 1$ et de raison 2.

Exercice n°1 page 169

Dans chacun des cas suivants, dire si la suite u, définie sur $\mathbb{N}$, est arithmétique. Si oui, préciser le premier terme et la raison.

a) $u_n = 5n + 1$; **b)** $u_n = \dfrac{4n^2 - 1}{2n + 1}$; **c)** $u_n = \dfrac{n}{n+1}$.

a) Pour tout entier n, $u_{n+1} - u_n = 5(n+1) + 1 - (5n+1) = 5$.
La suite u est $\boxed{\text{arithmétique}}$ de raison $\boxed{5}$ et de premier terme $\boxed{u_0 = 1}$.

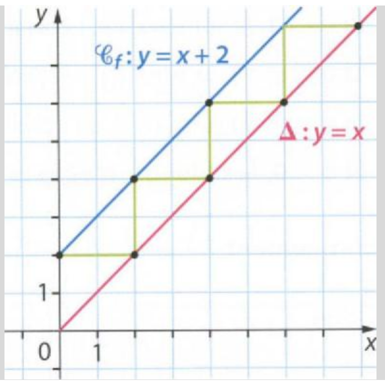
b) Pour tout entier n, $u_n = \dfrac{(2n-1)(2n+1)}{2n+1} = 2n - 1$.
La suite u est $\boxed{\text{arithmétique}}$ de raison $\boxed{2}$ et de premier terme $\boxed{u_0 = -1}$.

c) $u_0 = 0$, $u_1 = \dfrac{1}{2}$, $u_2 = \dfrac{2}{3}$. Comme $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$, la suite u n'est $\boxed{\text{pas arithmétique}}$.

Exercice n°3 page 169

On a représenté ci-contre la suite u de premier terme $u_0 = 0$, définie par récurrence par $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier n.

1) Lire les valeurs u_1, u_2 et u_3.
2) Quelle est la fonction f ?
3) En déduire que la suite u est arithmétique et en donner la raison.



1) $u_1 = \boxed{2}$; $u_2 = \boxed{4}$; $u_3 = \boxed{6}$.

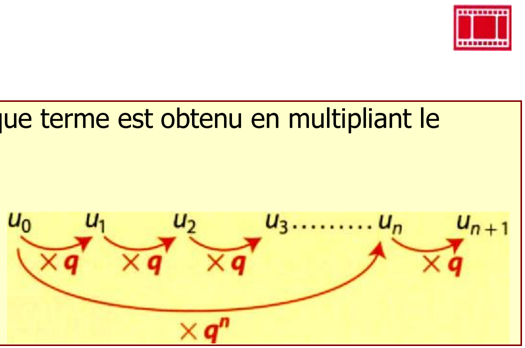
2) La fonction f est définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = \boxed{x + 2}$.

3) Pour tout entier n, $u_{n+1} = f(u_n) = u_n + 2$.
Donc la suite u est arithmétique de raison $\boxed{2}$ et de premier terme $u_0 = 0$.

2. Suites géométriques

Définition 2

On dit qu'une suite u est géométrique si, à partir de son terme initial, chaque terme est obtenu en multipliant le précédent par un même nombre.
Ainsi, il existe un réel q tel que pour tout entier n, $u_{n+1} = u_n \times q$.
Le nombre q est appelé **raison de la suite géométrique u**.
Dans le cas où la suite u ne s'annule pas, q est égal au quotient de deux termes consécutifs quelconques :



$q = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ (réel fixé indépendant de l'entier n).

Exemples :

1) La suite $\{1 ; 2 ; 4 ; 8 ; \dots\}$ des puissances de 2, de terme général $u_n = 2^n$, est une suite géométrique de premier terme 1 et de raison 2.

2) La suite v de terme général $v_n = (n+1)^2$ n'est pas une suite géométrique.
En effet, $v_0 = 1$; $v_1 = 4$; $v_2 = 9$, …
Pour passer d'un terme au suivant, on ne multiplie pas toujours par le même nombre.

THÉORÈME 3

Soit u une suite géométrique de raison q non nulle. Alors pour tout entier n, $\boldsymbol{u_n = u_0 \times q^n}$.
Plus généralement, pour tous entiers p et k, $\boldsymbol{u_p = u_k \times q^{p-k}}$.

Démonstration :

À partir de u_0 , on obtient u_n en multipliant n fois par la raison : $u_n = u_0 \times q \times q \times \dots \times q = u_0 \times q^n$.
On a alors $u_p = u_0 \times q^p$ et $u_k = u_0 \times q^k$.
Comme $q \neq 0$, $u_0 = \dfrac{u_k}{q^k}$, alors $u_p = \dfrac{u_k}{q^k} \times q^p$, soit $u_p = u_k \times q^{p-k}$.

THÉORÈME 4

Soit q un réel non nul.

- **Si $q > 1$**, la suite (q^n) est **strictement croissante**.
- **Si $q = 1$**, la suite (q^n) est **constante égale à 1**.
- **Si $0 < q < 1$**, la suite (q^n) est **strictement décroissante**.
- **Si $q = 0$**, la suite (q^n) est **constante égale à 0**, à partir du rang 1.
- **Si $q < 0$**, la suite (q^n) **n'est pas monotone**.

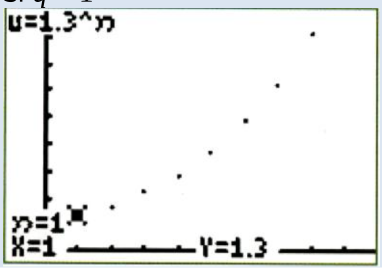
Démonstration :

Voir la démonstration à l'exercice 54, page 185.

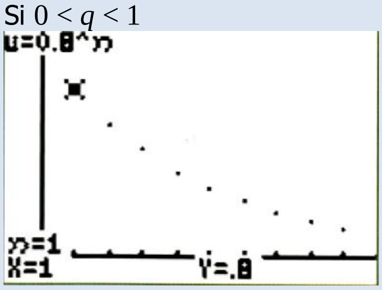
Illustration :

Graphiquement, à l'aide de la calculatrice :

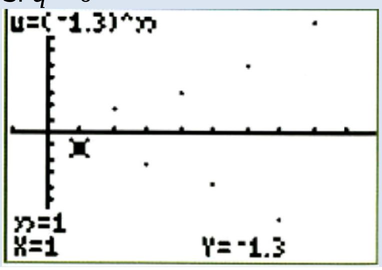
Si $q > 1$



Si $0 < q < 1$



Si $q < 0$



Exercice corrigé : ***Démontrer qu'une suite est, ou n'est pas, géométrique***

Les suites u, v et w sont-elles géométriques ? Si oui, en donner le premier terme et la raison.

Pour tout entier n : **a)** $u_n = \dfrac{-2}{5^n}$; **b)** $v_n = \dfrac{2^{2n}}{3^{3n}}$; **c)** $w_{n+1} = -w_n + 3$ **et** $w_0 = -4$.

Solution :

a) $u_0 = \dfrac{-2}{5^0} = \dfrac{-2}{1} = -2$; $u_1 = \dfrac{-2}{5^1} = \dfrac{-2}{5}$; $u_2 = \dfrac{-2}{5^2} = \dfrac{-2}{25}$.

On conjecture que pour passer d'un terme au suivant, on multiplie par $\dfrac{1}{5}$.

Pour tout entier n, $u_{n+1} = \dfrac{-2}{5^{n+1}} = \dfrac{1}{5}\left(\dfrac{-2}{5^n}\right) = \dfrac{1}{5}u_n$.

La suite u est géométrique de premier terme $u_0 = -2$ et de raison $\dfrac{1}{5}$.

b) $v_0 =- 1$; $v_1 = \dfrac{4}{27}$; $v_2 = \dfrac{16}{729}$.

On conjecture que pour passer d'un terme au suivant, on multiplie par $\dfrac{4}{27}$.

Méthode :
Avant toute chose, on calcule les trois premiers termes.
Pour démontrer qu'une suite u est géométrique :
on exprime u_{n+1} sous la forme $q \times u_n$;

La suite v est à termes strictement positifs. On a pour tout entier n :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2^{2n+2}}{3^{3n+3}} \times \frac{3^{3n}}{2^{2n}} = \frac{2^2}{3^3} = \frac{4}{27}.$$

La suite v est géométrique de raison $\frac{4}{27}$ et de premier terme $v_0 = 1$.

si les termes sont non nuls, on prouve que le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est constant, c'est-à-dire indépendant de n.

c) $w_0 = -4$; $w_1 = 7$; $w_2 = -4$.
On constate que l'on ne multiplie pas toujours par un même nombre pour passer d'un terme au suivant : la suite w n'est pas géométrique.

Pour démontrer qu'une suite u n'est pas géométrique, il suffit de trouver un exemple montrant que le quotient de deux termes consécutifs n'est pas constant.

Exercice n°4 page 171

Les suites u et v, définies sur $\mathbb{N}$, sont-elles géométriques ?
Si oui, préciser le premier terme et la raison.

a) $u_n = 5^{2n+3}$; **b)** $v_n = \frac{3n+2}{n+1}$.

a) 1re méthode :

Pour tout entier n :

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{5^{2n+5}}{5^{2n+3}} = 5^{2n+5-(2n+3)} = 5^2 = 25$,

d'où $u_{n+1} = 25\, u_n$.

2e méthode :

Pour tout entier n :

$u_n = 5^{2n+3} = 5^{2n} \times 5^3 = (5^2)^n \times 125 = 125 \times 25^n = u_0 \times 25^n$.

La suite u est $\boxed{\text{géométrique}}$ de raison $\boxed{25}$ et de premier terme $\boxed{u_0 = 125}$.

b) $v_0 = 2$; $v_1 = \frac{5}{2}$; $v_2 = \frac{8}{3}$, donc $\frac{v_1}{v_0} = \frac{5}{4}$ et $\frac{v_2}{v_1} = \frac{16}{15}$.

Donc la suite v n'est $\boxed{\text{pas géométrique}}$.

Exercice n°41 page 184

Dans chacun des cas suivants, dire si la suite u, dont on donne la définition sur $\mathbb{N}$, est géométrique :

a) $u_n = \frac{4}{3^n}$;

b) u est la suite des entiers pairs non nuls ;

c) $\begin{cases} u_0 = -3 \\ u_{n+1} = u_n - \frac{3}{100} u_n \end{cases}$;

d) $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = 0{,}5u_n + 3 \end{cases}$.

a) Pour tout entier n, $u_n = 4\left(\frac{1}{3}\right)^n$. Donc la suite u est $\boxed{\text{géométrique}}$ de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $u_0 = 4$.

b) $u_0 = 2$, $u_1 = 4$ et $u_2 = 6$. Donc la suite u n'est $\boxed{\text{pas géométrique}}$.

c) Pour tout entier n, $u_{n+1} = 0{,}97\, u_n$. Donc la suite u est $\boxed{\text{géométrique}}$ de raison $0{,}97$ et de premier terme $u_0 = -3$.

d) On a $u_0 = 4$, $u_1 = 5$, $u_2 = \frac{11}{2}$, donc $\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$. La suite u n'est $\boxed{\text{pas géométrique}}$.

3. Calculs de sommes de termes consécutifs

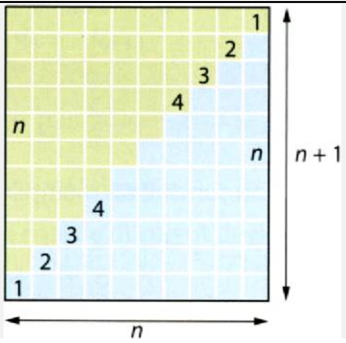
Théorème 5

Soit un entier naturel n non nul. Alors la somme des n premiers entiers non nuls est :

$$\mathbf{1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}}.$$

Démonstration :

On dispose côte-à-côte des rectangles de largeur 1 et de hauteur 1, 2, 3, ..., n, de façon à obtenir la surface bleue, et son symétrique la surface verte.
L'aire de chaque surface est : $1 + 2 + 3 + \dots + n$.
Or la réunion des surfaces verte et bleue est un rectangle de côtés n et $n + 1$.
Donc : $2 \times (1 + 2 + 3 + \dots + n) = n \times (n + 1)$; d'où le résultat.



Exemples :

1) $1 + 2 + 3 + \dots + 10 = \dfrac{10 \times 11}{2} = 55.$

2) $10 + 11 + \dots + 50 = (1 + 2 + 3 + \dots + 50) - (1 + 2 + 3 + \dots + 9) = \dfrac{50 \times 51}{2} - \dfrac{9 \times 10}{2} = 1\,230.$

Remarque :
Pour tout entier $n \geq 1$, la somme $1 + 2 + 3 + \dots + n$ est entière.
Le théorème ci-dessus permet ainsi d'affirmer que $n(n+ 1)$ est toujours entier. Ce qui se justifie aisément par ailleurs : comme les entiers n et $n + 1$ sont consécutifs, l'un des deux est pair ; le produit $n(n + 1)$ est donc un nombre pair.

Exercice n°62 page 187

Calculer les sommes données.
$S_1 = 1 + 2 + 3 + \dots + 2\,009 + 2\,010 + 2\,011.$
$S_2 = 2\,010 + 2\,011 + 2\,012 + \dots + 9\,999 + 10\,000.$

$S_1 = \dfrac{2\,011 \times 2\,012}{2} = \boxed{2\,023\,066}.$

$S_2 = (1 + 2 + \dots + 10\,000) - (1 + 2 + \dots + 2\,009) = \dfrac{10\,000 \times 10\,001}{2} - \dfrac{2\,009 \times 2\,010}{2} = \boxed{47\,985\,955}.$

Exercice n°63 page 187

Calculer les sommes données.
$S_1 = 2 + 6 + 10 + 14 + \dots + 598 + 602.$
$S_2 = 1 - 4 - 9 - 14 - \dots - 999.$

Conseil : Pour S_1, vérifier tout d'abord que : $S_1 = 2 + (2 + 4) + (2 + 2 \times 4) + \dots + (2 + 150 \times 4)$,
puis que : $S_1 = 151 \times 2 + 4 \times (1 + 2 + \dots + 150)$.

$S_1 = 2 + (2 + 4) + (2 + 2 \times 4) + \dots + (2 + 150 \times 4)$

$S_1 = 151 \times 2 + 4 \times (1 + 2 + \dots + 150)$

$S_1 = 151 \times 2 + 4 \times \left(\dfrac{150 \times 151}{2}\right)$

$S_1 = \boxed{45\,602}.$

$S_2 = 1 - \big(4 + (4 + 5) + (4 + 2 \times 5) + \dots + (4 + 5 \times 199)\big)$

$S_2 = 1 - \big(200 \times 4 + 5(1 + 2 + \dots + 199)\big)$

$S_2 = 1 - \left(800 + 5 \times \left(\dfrac{199 \times 200}{2}\right)\right)$

$S_2 = \boxed{-100\,299}.$

THÉORÈME 6

Soit un entier naturel n non nul et q un réel différent de 1.
Alors : $\mathbf{1 + q + q^2 + \dots + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}}$.

Démonstration :
On pose $S = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$.
On a $q \times S = q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n+1}$.
En soustrayant : $S - q \times S = (1 + q + q^2 + \dots + q^n) - (q + q^2 + \dots + q^{n+1})$.
En annulant les sommes de termes opposés : $S - q \times S = 1 - q^{n+1}$.

D'où $(1-q)\times S = 1-q^{n+1}$, et comme $q\neq 1$, on obtient : $S=\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Remarque :

Dans le cas où $q = 1$, on a pour tout entier $n\geq 1$: $1+q+q^2+\ldots+q^n = 1+1+1+\ldots+1 = n+1$.

Exemples :

1) $1+2+2^2+\ldots+2^{10}=\dfrac{1-2^{11}}{1-2}=2\,047$.

2) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\ldots+\dfrac{1}{2^{10}}=\left(1+\dfrac{1}{2}+\ldots+\dfrac{1}{2^{10}}\right)-1=\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{11}}{1-\dfrac{1}{2}}-1=\dfrac{2^{11}-1}{2^{10}}=\dfrac{1\,023}{1\,024}$.

On peut aussi calculer cette somme en factorisant par $\dfrac{1}{2}$:

$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\ldots+\dfrac{1}{2^{10}}=\dfrac{1}{2}\times\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\ldots+\dfrac{1}{2^9}\right)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1-\dfrac{1}{2^{10}}}{1-\dfrac{1}{2}}=\dfrac{2^{10}-1}{2^{10}}=\dfrac{1\,023}{1\,024}$.

Exercice corrigé : ***Calculer des sommes***

1) Calculer les sommes suivantes : **a)** $S = 3+7+11+\ldots+203$.

b) $S = 11+22+44+\ldots+360\,448$.

2) Quelle est la somme des multiples de 7 compris entre 100 et 2 000 ?

Solution :

1) a) Les termes de la somme sont les termes consécutifs de la suite arithmétique de premier terme 3 et de raison 4.

Comme $7 = 3+4\times 1$, ... et $203 = 3+4\times 50$,
$S = 3+(3+4\times 1)+(3+4\times 2)+\ldots+(3+4\times 50)$.

D'où $S = 3+3+\ldots+3+4\times(1+2+\ldots+50)$.

Donc $S = 3\times 51+4\times\dfrac{50\times 51}{2}=5\,153$.

b) Les termes de la somme sont les termes consécutifs de la suite géométrique de premier terme 11 et de raison 2.
Comme $22 = 11\times 2$, ... et $360\,448 = 11\times 215$,
$S = 11+11\times 2+11\times 2^2+\ldots+11\times 2^{15}$.
D'où $S = 11\times(1+2+2^2+\ldots+2^{15})$.

Donc $S = 11\times\dfrac{1-2^{16}}{1-2}=11\times(2^{16}-1)=720\,885$.

Méthode :
On identifie la nature de la suite mise jeu avec son premier terme et sa raison.
Pour calculer une somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique :
on écrit chaque terme en fonction du premier terme u_0 et de la raison r :
$u_n = u_0 + r\times n$;
on regroupe les termes identiques et on factorise au maximum ;
on utilise la formule : $1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Pour calculer une somme de termes consécutifs d'une suite géométrique :
on utilise l'expression de chaque terme en fonction du premier terme u_0 et de la raison q : $u_n = u_0\times q^n$;
on factorise par u_0 ;
on utilise la formule :
$1+q+q^2+\ldots+q^n=\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$, pour $q\neq 1$.

2) Le premier multiple supérieur à 7 est 105 et le dernier inférieur à 2 000 est 1 995.
Il faut calculer la somme $S = 105+112+\ldots+1\,995$.
La suite utilisée est une suite arithmétique de premier terme 105 et de raison 7.
Comme $1\,995 = 105+7\times 270$:
$S = 105+(105+7)+(105+7\times 2)+\ldots+(105+7\times 270)$
$S = 105+105+\ldots+105+7\times(1+2+\ldots+270)$

Donc $S = 105\times 271+7\times\dfrac{270\times 271}{2}=284\,550$.

La somme cherchée est 284 550.

Exercice n°67 page 187

Calculer les sommes données.

$S_1 = 1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{27}+\ldots\dfrac{1}{729}$;

$S_2 = 1-2+4-8+\ldots+1\,024$.

S_1 est la somme des 7 premiers termes de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison $\frac{1}{3}$:

$$S_1 = 1 + \left(\frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{3}\right)^6 = \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^7}{1-\frac{1}{3}} = \boxed{\frac{3}{2} - \frac{1}{2\times 3^6}} \approx 1{,}499.$$

S_2 est la somme des 11 premiers termes de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison -2 :

$$S_2 = 1 + (-2) + (-2)^2 + \ldots + (-2)^{10} = \frac{1-(-2)^{11}}{1-(-2)} = \frac{1+2^{11}}{3} = \boxed{683}.$$

Exercice n°68 page 187

Calculer les sommes données.

$S_1 = 2 + \frac{2}{5} + \frac{2}{25} + \ldots + \frac{2}{15\ 625}$.

$S_2 = 10 + 1 + 0{,}1 + 0{,}01 + \ldots + 10^{-6}$.

Conseil : Pour S_1, vérifier tout d'abord que : $S_1 = 2 \times \left(1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \ldots + \frac{1}{5^6}\right)$.

$$S_1 = 2\left(1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \ldots + \frac{1}{5^6}\right) = 2 \times \frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^7}{1-\frac{1}{5}} = \boxed{\frac{5}{2} - \frac{1}{2\times 5^6}} \approx 2{,}499.$$

$$S_2 = 10 + \left(1 + \frac{1}{10} + \left(\frac{1}{10}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{10}\right)^6\right) = 10 + \frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^7}{1-\frac{1}{10}} = \boxed{\frac{100}{9} - \frac{1}{9\times 10^6}} \approx 11{,}11.$$

Exercice n°70 page 188

u est la suite géométrique de premier terme $u_0 = 8$ et de raison $q = \frac{1}{2}$.

Soit S la somme des 21 premiers termes de la suite u : $S = u_0 + u_1 + \ldots + u_{20}$.

1) Montrer que $S = u_0 \times (1 + q + q^2 + \ldots + q^{20})$.

2) En déduire la valeur exacte de S.

1) On a pour tout entier n, $u_n = u_0\, q^n$.

Donc $S = u_0\,(1 + q + q^2 + \ldots + q^{20})$

2) $S = u_0 \times \frac{1-q^{21}}{1-q} = 8 \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{21}}{1-\frac{1}{2}} = \boxed{16 - \frac{1}{2^{17}}} \approx 16.$

4. Approche du comportement à l'infini

Théorème 7

Soit u une suite arithmétique de raison r non nulle.

- **Si $r > 0$**, la suite u diverge vers $+\infty$: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
- **Si $r < 0$**, la suite u diverge vers $+\infty$: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Démonstration :

Soit u une suite arithmétique de raison $r \neq 0$.
Son ternie général est : $u_n = u_0 + n \times r$.

- Si $r > 0$, $u_n \geq 1\ 000$ dès que $n \geq \frac{1\ 000 - u_0}{r}$; $u_n \geq 10\ 000$ dès que $n \geq \frac{10\ 000 - u_0}{r}$.

  Plus généralement, pour tout réel M, $u_n \geq M$ dès que $n \geq \frac{M - u_0}{r}$: la suite u diverge vers $+\infty$.

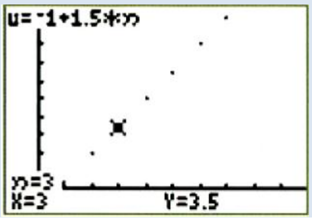
- Si $r < 0$, $u_n \leq -1\ 000$ dès que $n \geq \frac{-1\ 000 - u_0}{r}$; $u_n \leq -10\ 000$ dès que $n \geq \frac{-1\ 000 - u_0}{r}$.

  Plus généralement, pour tout réel M, $u_n \leq M$ dès que $n \geq \frac{M - u_0}{r}$: la suite u diverge vers $-\infty$.

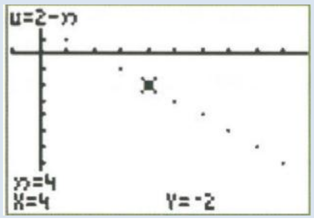
Illustration :

Graphiquement, à l'aide de la calculatrice :

pour $r = 1,5$ et $u_0 = -1$:



pour $r = -1$ et $u_0 = 2$:



THÉORÈME 7

Soit q un réel différent de 1.

- **Si $q > 1$**, la suite (q^n) diverge vers $+\infty$: $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$.
- **Si $-1 < q < 1$**, la suite (q^n) converge vers 0 : $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.
- **Si $q \leq -1$**, la suite (q^n) **diverge et n'admet pas de limite.**

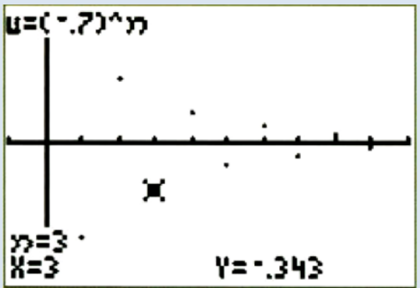
Démonstration :

Ce théorème est admis.

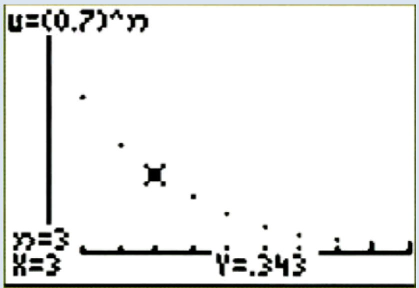
Illustration :

Graphiquement, à l'aide de la calculatrice :

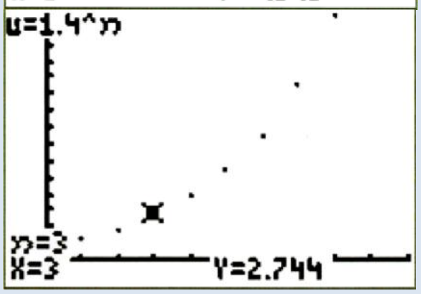
pour $q = 0,7$:



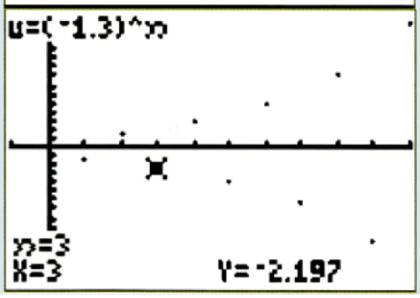
pour $q = -0,7$:



pour $q = 1,4$:



pour $q = -1,3$:



Exemple :

Soit u la suite géométrique de premier terme 3 et de raison $-0,5$.

Pour tout entier n, $u_n = 3 \times (-0,5)^n$.

Comme $-1 < q < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} (-0,5)^n = 0$.

Donc la suite u converge vers 0.

Numériquement, à l'aide de la calculatrice ou d'un tableur, on a::

$|u_n| < 0,001$ dès que $n \geq 12$;

$|u_n| < 10^{-6}$ dès que $n \geq 21$;

$|u_n| < 10^{-12}$ dès que $n \geq 42$.

Exercice corrigé : ***Examiner le comportement à l'infini***

Soit u la suite arithmétique de raison $0,8$ et de premier terme $u_0 = -10$.

Soit v la suite géométrique de raison $1,2$ et de premier terme $v_0 = -2$.

Soit w la suite géométrique de raison $\frac{3}{4}$ et de premier terme $w_0 = 5$.

1) Déterminer les limites des suites u, v et w.

2) Déterminer le rang à partir duquel : **a)** $u_n \geq 10^6$; **b)** $v_n \leq -10^6$; **c)** $|w_n| \leq 10^{-6}$;

Solution :

1) • La suite u est arithmétique de raison $r = 0,8$, donc $r > 0$.
La suite u diverge donc vers $+\infty$: $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Méthode :
Pour déterminer la limite d'une suite arithmétique, on examine le signe de sa raison (positif ou négatif).

- Comme $1{,}2 > 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} 1{,}2^n = +\infty$.

Pour déterminer la limite d'une suite géométrique de raison q, on détermine d'abord le comportement à l'infini de la suite (q^n) en regardant si q est :
- supérieur à 1 ;
- compris entre -1 et 1 ;
- inférieur à -1.

Puis on prend en compte le premier terme de la suite.

Le terme général de la suite v est $v_n = -2 \times (1{,}2)^n$.
En multipliant par -2 (négatif), on obtient une suite v qui diverge vers $-\infty$: $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$.

- Comme $-1 < \dfrac{3}{4} < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{3}{4}\right)^n = 0$.

Le terme général de la suite w est $w_n = 5 \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$.

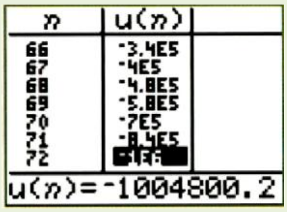
En multipliant par 5, on obtient une suite w qui converge vers 0 : $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 0$.

2) a) Le terme général de u est : $u_n = -10 + 0{,}8 \times n$.

On résout : $-10 + 0{,}8n \geq 10^6$ équivalent à : $n \geq \dfrac{10^6 + 10}{0{,}8}$, et à : $n > 1\,250\,012{,}5$, où n est un entier.
Donc $u_n \geq 10^6$ dès que $n \geq 1\,250\,013$.

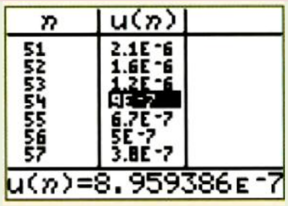
Pour déterminer un rang à partir duquel $u_n > 10^6$, on peut, par exemple :
- si c'est possible, résoudre algébriquement l'inéquation ;
- sinon, utiliser les variations de la suite u et la calculatrice pour déterminer le plus petit rang N vérifiant $u_N \geq 10^6$.

b) La suite v est décroissante, car pour tout entier n, $v_{n+1} - v_n = -0{,}4(1{,}2)^n$, donc $v_{n+1} - v_n < 0$.
Il suffit de trouver un rang N tel que $v_N \leq -10^6$: 72 convient.
Alors pour tout entier $n \geq 72$, on a $v_n \leq -10^6$.



c) La suite w est décroissante, car pour tout entier n, $w_{n+1} - w_n = \dfrac{-5}{4} \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$,

donc $v_{n+1} - v_n < 0$.
Il suffit de trouver un rang N tel que $|w| < 10^{-6}$: 54 convient.
Alors pour tout entier $n \geq 54$, on a $|w| < 10^{-6}$.



Exercice n°11 page 175

Soit u une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r. Dans chaque cas, déterminer la limite de la suite u :

1) $u_0 = 2$ et $r = -3$. **2)** $u_0 = -3$ et $r = 2$. **3)** $u_0 = -2$ et $r = -3$. **4)** $u_0 = 3$ et $r = 2$.

1) La suite est arithmétique de raison $r = -3$, donc u est divergente vers $\boxed{-\infty}$.

2) La suite est arithmétique de raison $r = 2$, donc u est divergente vers $\boxed{+\infty}$.

3) La suite est arithmétique de raison $r = -3$, donc u est divergente vers $\boxed{-\infty}$.

4) La suite est arithmétique de raison $r = 2$, donc u est divergente vers $\boxed{+\infty}$.

Exercice n°12 page 175

Soit v une suite géométrique de premier terme v_0 et de raison q. Dans chaque cas, préciser si la suite v admet une limite. Si oui, la déterminer.

1) $v_0 = 2$ et $q = 3$. **2)** $v_0 = 2$ et $q = -3$. **3)** $v_0 = -2$ et $q = 0{,}5$. **4)** $v_0 = 3$ et $q = \dfrac{(-5)}{7}$.

1) La suite est géométrique de raison $3 > 1$ et $v_0 = 2$. Donc elle diverge vers $\boxed{+\infty}$.

2) La suite est géométrique de raison $-3 < -1$. Donc elle diverge sans avoir de limites.

3) La suite est géométrique de raison $0{,}5 \in]-1\,;\,1[$. Donc elle converge vers $\boxed{0}$.

4) La suite est géométrique de raison $\dfrac{-5}{7} \in]-1\,;\,1[$. Donc elle converge vers $\boxed{0}$.

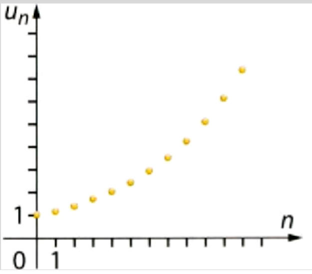
Exercice n°82 page 190

Les suites géométriques u, v et w sont représentées ci-contre.

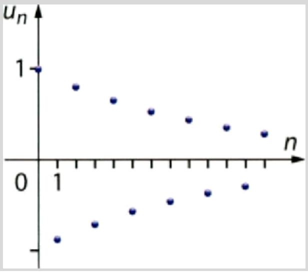
1) En admettant que les tendances observées se poursuivent à l'infini, donner la limite de chaque suite ?

2) Préciser des valeurs possibles de la raison pour chaque suite.

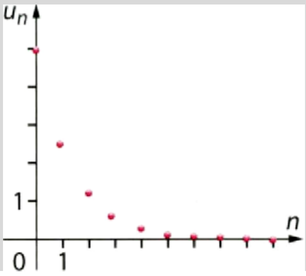
Suite u



Suite v



Suite w



1) $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \boxed{+\infty}$. $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \boxed{0}$. $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = \boxed{0}$.

2) La suite u a une raison $\boxed{q > 1}$.

La suite v a une raison q telle que $\boxed{-1 < q < 0}$.

La suite w a une raison q telle que $\boxed{0 < q < 1}$.