Ch.3 : Fonctions de référence

1 Fonctions de référence déjà connues

1.1 Les fonctions affines

Définition 1

Une **fonction affine** f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\boldsymbol{f(x) = ax + b}$, où a et b sont deux réels fixés.

Remarques :

- Si $b = 0$, l'expression de f est $f(x) = ax$ et f est une fonction linéaire.
- Si $a = 0$, l'expression de f est $f(x) = b$ et f est une fonction constante.

Propriété 1

On considère la fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax + b$, où a et b sont des réels donnés.

- Si a est positif, la fonction affine f est croissante sur $\mathbb{R}$.
- Si a est négatif, la fonction affine f est décroissante sur $\mathbb{R}$.
- La courbe représentative de f dans un repère du plan est une droite.

- Si $a > 0$:

x	$-\infty$	$+\infty$
$ax + b$	↗	

- Si $a < 0$:

x	$-\infty$	$+\infty$
$ax + b$	↘	

1.2 La fonction carré

Définition 2

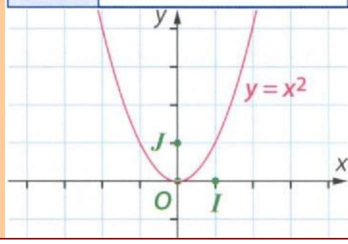
La **fonction carré** est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\boldsymbol{f(x)} = x^2$.

Propriétés 2

- La fonction carré est **décroissante sur $]-\infty\,;\,0]$ et croissante sur $[0;\,+\infty[$**.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^2	↘	0	↗

- La courbe représentative de la fonction carré s'appelle une **parabole**.
Dans un repère orthogonal du plan, elle est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



1.3 La fonction inverse

Définition 3

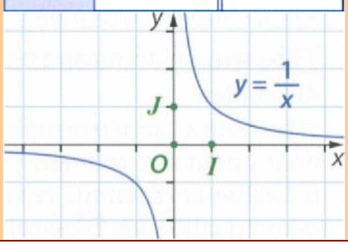
La **fonction inverse** est la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par : $\boldsymbol{f(x)} = \dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}$.

Propriétés 3

- La fonction inverse est décroissante sur chacun des intervalles $]-\infty\,;\,0[$ et $[0\,;\,+\infty[$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\dfrac{1}{x}$	↘	||	↘

- La courbe représentative de la fonction inverse s'appelle une **hyperbole**.
Dans un repère du plan elle est symétrique par rapport à l'origine.



Exercice corrigé : ***Utiliser les variations des fonctions de référence***

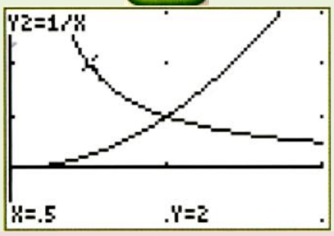
1) Justifier que, pour tout réel $x < 0$, on a $\frac{1}{x} < x^2$.

2) Conjecturer, à l'aide de la calculatrice, l'ordre entre x^2 et $\frac{1}{x}$ pour tout réel x strictement positif.

3) Démontrer cette conjecture en utilisant les variations des fonctions carré et inverse.

Solution :

1) Si $x < 0$, alors $\frac{1}{x}$ est négatif et x^2 est positif ;
donc : $\frac{1}{x} < 0 < x^2$.



Méthode :

Un réel non nul et son inverse sont de même signe ; un carré est toujours positif.

2) La position relative des deux courbes sur la calculatrice permet de conjecturer que :
lorsque $0 < x \leq 1$, on a $\frac{1}{x} \geq x^2$,
et lorsque $x \geq 1$, on a $\frac{1}{x} < x^2$.

- *Lorsqu'une courbe $\mathscr{H}$ est au-dessus d'une courbe $\mathscr{P}$, pour un x donné, l'ordonnée du point sur $\mathscr{H}$ est supérieure à l'ordonnée du point sur $\mathscr{P}$: les positions relatives de leurs courbes permettent de comparer les deux fonctions.*
- *L'observation de l'écran ne permet de voir qu'une partie des courbes, on ne peut donc pas être sûr de chaque inégalité sur tout l'intervalle considéré.*

3) L'image de 1 par la fonction inverse est égale à 1 $\left(\frac{1}{1} = 1\right)$, comme l'image de 1 par la fonction carré $(1^2 = 1)$. Donc le point de coordonnées $(1 ; 1)$ est commun aux deux courbes.

La fonction carré est croissante sur $]0 ; 1]$;
donc, si $x \in]0 ; 1]$, $x^2 \leq 1^2$.

La fonction inverse est décroissante sur $]0 ; 1]$;
donc, si $x \in]0 ; 1]$, $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{1}$.

- *Deux réels positifs et leurs carrés sont rangés dans le même ordre.*
- *Deux réels strictement positifs et leurs inverses sont rangés dans l'ordre contraire.*

Ainsi, lorsque $x \in]0 ; 1)$, $\frac{1}{x} \geq 1 \geq x^2$ et donc $\frac{1}{x} \geq x^2$.

Sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$ la fonction carré est croissante et la fonction inverse décroissante ;
donc, si $x \in [1 ; +\infty[$, $x^2 \geq 1^2$ et $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{1}$.

Finalement, on obtient lorsque $x \in [1 ; +\infty[$: $\frac{1}{x} < x^2$. La conjecture est prouvée.

2 LA FONCTION RACINE CARRÉE

2.1 Définition, sens de variation et représentation graphique

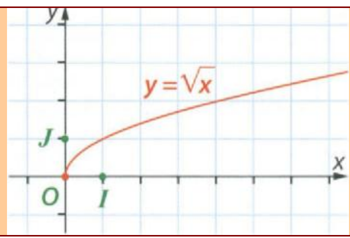
DÉFINITION 4

La fonction **racine carrée** est la fonction f qui à tout réel positif (ou nul) x associe sa racine carrée, c'est-à-dire le réel positif (ou nul) qui a pour carré x.
La fonction racine carrée est **définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$** par : $f(x) = \sqrt{x}$.

PROPRIÉTÉ 4

La fonction racine carrée est **croissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.**

x	0	$+\infty$
$\sqrt{x}$	0 ↗	



Démonstration :

Soit deux réels a et b tels que $0 \leq a \leq b$. On veut comparer $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$.

Pour cela, on calcule leur différence : $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \dfrac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$.

On utilise l'identité remarquable $(x - y)(x + y) = x^2 - y^2$ pour obtenir : $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \dfrac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$.

Comme $a \leq b$, alors $a - b$ est négatif et $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ est positif en tant que somme de deux réels positifs.
Ainsi, avec la règle des signes d'un quotient, on obtient : $\sqrt{a} - \sqrt{b} \leq 0$, ou encore $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$.
Les images $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$ sont rangées dans le même ordre que les nombres positifs a et b de départ, d'où la croissance de $x \longmapsto \sqrt{x}$ sur $[0\ ;+\infty[$.

Exercice corrigé : ***Utiliser la fonction racine carrée***

1) **Déterminer l'ensemble D formé des réels x pour lesquels l'expression $\sqrt{-x^2 + x + 2}$ est définie.**

2) **On appelle f la fonction définie sur D par : $x \longmapsto \sqrt{-x^2 + x + 2}$.**

a) **Conjecturer, à l'aide de la calculatrice, l'existence d'un extremum pour f.**

b) **Montrer que la fonction $x \longmapsto -x^2 + x + 2$ admet un maximum en une valeur que l'on précisera.**

c) **Démontrer la conjecture émise en a).**

Solution :

1) Pour que cette expression soit définie, il faut et il suffit que $-x^2 + x + 2 \geq 0$.
On calcule le discriminant : $\Delta = 1^2 - 4 \times (-1) \times 2 = 9$.

Comme $\Delta > 0$, le trinôme $-x^2 + x + 2$ a deux racines : $x_1 = \dfrac{-1-3}{-2} = 2$ et $x_2 = \dfrac{-1+3}{-2} = -1$.

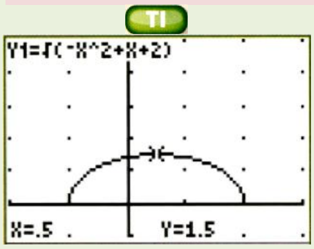
On peut alors conclure : $D = [-1\ ;2]$.

Méthode :

La fonction racine carrée est définie sur $[0\ ;+\infty[$.

- Si $\Delta > 0$, alors $ax^2 + bx + c$ est du signe de a pour toutes les valeurs de x, sauf celles situées entre les deux racines.

2) **a)** Avec la calculatrice, il semble que f admet un maximum en $0{,}5$ et que ce maximum vaut $1{,}5$.



Une fonction polynôme de degré 2 est « d'abord croissante, puis décroissante » quand $a < 0$.

b) La fonction $x \longmapsto -x^2 + x + 2$ est « d'abord croissante, puis décroissante », donc elle admet un maximum.

Ce maximum est atteint en $\dfrac{-1}{2(-1)} = \dfrac{1}{2}$ et vaut $-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{2} + 2 = 2{,}25$.

Le sommet de la parabole représentant une fonction trinôme $x \longmapsto ax^2 + bx + c$ a pour abscisse $\dfrac{-b}{2a}$

c) D'après **b)**, pour tout $x \in [-1\ ;2]$, on a :
$-x^2 + x + 2 \leq 2{,}25$ et l'égalité est vérifiée pour $x = \dfrac{1}{2}$.

D'où : pour tout $x \in [-1; 2]$, $\sqrt{-x^2 + x + 2} \leq \sqrt{2{,}25}$.

La fonction racine carrée est croissante sur $[0\ ;+\infty[$, donc des nombres positifs et leurs racines carrées sont rangés dans le même ordre.

Ainsi, pour tout $x \in [-1\ ;2]$, on a : $f(x) \leq 1{,}5$ avec $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1{,}5$, ce qui prouve la conjecture émise en **a)**.

2.2 Comparaison des réels x, x^2 et $\sqrt{x}$, pour $x \geq 0$

PROPRIÉTÉS 5

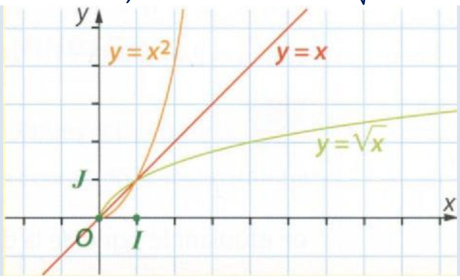
- Si $0 \leq x \leq 1$, alors : $x^2 \leq x \leq \sqrt{x}$.
- Si $x > 1$, alors : $\sqrt{x} \leq x \leq x^2$.

Démonstration :

Voir la démonstration à l'Activité 2, page 48.

Conséquence : *Positions relatives des courbes représentatives des fonctions :* $x \longmapsto x$, $x \longmapsto x^2$ et $x \longmapsto \sqrt{x}$

- Sur l'intervalle $[0 ; 1]$, la courbe représentant la fonction carré est en-dessous de la droite d'équation $y = x$, qui est elle-même en-dessous de la courbe représentant la fonction racine carrée.
- Sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$, les positions de ces trois courbes sont inversées.



Remarques :

- Sur la figure, les points de coordonnées $(0 ; 0)$ et $(1 ; 1)$ sont communs aux trois courbes. (Voir le problème 100, p. 71.)
- On a vu que si un nombre appartient à l'intervalle $[0 ; 1]$, il est supérieur à son carré, et inférieur à sa racine carrée… !

3 LA FONCTION VALEUR ABSOLUE

3.1 Définition et notation

DÉFINITION 5

La **fonction valeur absolue** est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

- **si $x \geq 0$, alors $f(x) = x$;**
- **si $x \leq 0$, alors $f(x) = -x$.**

NOTATION

La **valeur absolue** d'un nombre réel x se note $|x|$.
On a donc : $|x| = x$ **si x est positif** et $|x| = -x$ **si x est négatif**.

Conséquences :

1) Pour tout nombre réel x, $|x| \geq 0$.

2) $|x| = 0$ équivaut à $x = 0$.

3) Deux nombres réels opposés ont la même valeur absolue : pour tout nombre réel x, $|-x| = |x|$.

4) Deux nombres réels ont la même valeur absolue si, et seulement si, ils sont égaux ou opposés : $|x| = |y|$ équivaut à $x = y$ ou $x = -y$.

5) Pour tout nombre réel x, $\sqrt{x^2} = |x|$.

Démonstration :

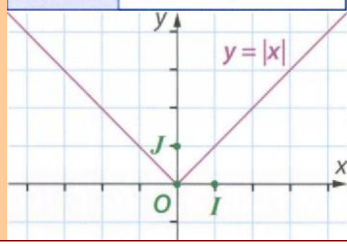
Voir les démonstrations à l'exercice 63, page 65.

3.2 Variations et représentation graphique

PROPRIÉTÉ 6

- La fonction valeur absolue est **décroissante sur $]-\infty ; 0]$ et croissante sur $[0 ; +\infty[$.**
- La représentation graphique de la fonction valeur absolue est la **réunion de deux demi-droites**.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\lvert x \rvert$	↘	0	↗



Démonstration :

La fonction $x \longmapsto -x$ est une fonction affine décroissante et la fonction $x \longmapsto x$ une fonction affine croissante.
D'où le tableau de variations et la représentation graphique ci-contre.

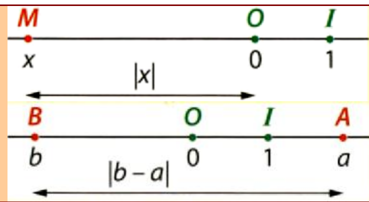
Remarque :

Dans un repère orthogonal, la représentation graphique de la fonction valeur absolue est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

3.3 Valeur absolue et distance

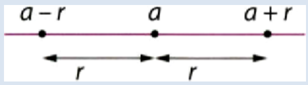
PROPRIÉTÉS 7

- Si x est un nombre réel et M le point d'abscisse x sur une droite graduée de repère (O ; I), alors **OM** = $|x|$.
- Si a et b sont deux réels, A et B les points d'abscisses respectives a et b d'une droite graduée, alors : $AB = |a-b| = |b-a|$.



Remarque :

Si a est un nombre réel, et r un nombre réel positif, l'intervalle $[a-r\ ;\ a+r]$ est formé de tous les réels x qui sont à une distance de a inférieure ou égale à r.
Ainsi : $x \in [a-r\ ;\ a+r]$ équivaut à $|x-a| \leq r$.



Exercice corrigé : ***Résoudre un problème de distance en utilisant la valeur absolue***

Sur une droite graduée, les points A et B ont pour abscisses respectives –5 et 3.
On cherche à déterminer tous les points M de la droite vérifiant : AM ≥ 2 BM.
M désigne un point variable sur la droite graduée ; on appelle x son abscisse.

1) Le point O appartient-il à l'ensemble recherché ?

2) Exprimer les distances AM et BM en fonction de x, en utilisant la valeur absolue.

3) a) Écrire AM en fonction de x sans utiliser la valeur absolue, en distinguant les cas $x \leq -5$ et $x \geq -5$.

b) Écrire de même BM en fonction de x en distinguant deux cas.

4) Quel est l'ensemble des points M de la droite vérifiant AM ≥ 2 BM ?

Solution :

1) $AO = |-5-0| = 5$ et $BO = |3-0| = 3$; donc $2\ BO = 6$ et $AO < 2\ BO$.
Le point O n'appartient donc pas à l'ensemble recherché.

2) On exprime les distances AM et BM à l'aide de la valeur absolue :
$AM = |x-(-5)| = |x+5|$ et $BM = |x-3|$.

3) a)

x	$-\infty$		-5		$+\infty$
$x+5$		$-$	0	$+$	
$\lvert x+5\rvert$		$-x-5$	0	$x+5$	

b)

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$x-3$		$-$	0	$+$	
$\lvert x-3\rvert$		$-x+3$	0	$x-3$	

4) On doit résoudre l'inéquation (I) : $|x+5| \geq 2|x-3|$.
On est ainsi amené à étudier trois cas :

- Si $x \leq -5$, (I) équivaut à $-x-5 \geq 2(-x+3)$, ou encore à $x \geq 11$.
  $x \leq -5$ et $x \geq 11$ étant incompatibles, ce cas ne donne pas de solution.
- Si $-5 \leq x \leq 3$, (I) équivaut à $x+5 \geq 2(-x+3)$, ou encore à $3x \geq 1$, soit à $x \geq \dfrac{1}{3}$;
  d'où l'intervalle des solutions $\left[\dfrac{1}{3}\ ,\ 3\right]$.
- Si $x \geq 3$, (I) équivaut à $x+5 \geq 2(x-3)$, ou encore à $x \leq 11$; d'où l'intervalle des solutions $[3\ ;\ 11]$.

Bilan : les points M de la droite vérifiant $AM \geq 2\ BM$ sont ceux dont l'abscisse appartient à l'intervalle $\left[\dfrac{1}{3}\ ,\ 11\right]$.

Méthode :

Soit a et b deux réels, A et B les points d'abscisses respectives a et b d'une droite graduée ; alors $AB = |a-b| = |b-a|$.

Si $X \geq 0$, alors $|X| = X$.
Si $X \leq 0$, $|X| = -X$.

On écrit l'inéquation sans valeurs absolues en distinguant plusieurs cas.

On prend la réunion des ensembles de solutions trouvés pour les différents cas.