Ch.9 : Suites numériques – Généralités

Dans tout le chapitre, les entiers considérés sont **naturels**, c'est-à-dire positifs ou nuls.

1 DÉFINIR UNE SUITE NUMÉRIQUE

DÉFINITIONS 1

Soit un entier p.
Une **suite numérique u définie à partir du rang p** est une fonction qui à chaque entier $n \geq p$ associe un réel, noté $u(n)$ ou $\boldsymbol{u_n}$.

Cette suite est aussi notée $(u_n)_{n \geq p}$ ou (u_n) ou simplement u.

u_n est appelé **terme général de la suite** ou **terme d'indice n** ;

u_p est le **premier terme**, ou **terme initial**, **de la suite**.

Commentaire :

u_n se lit « u indice n ».

Remarques :

Attention à l'**écriture indicielle** :

- u_{n+1} est le terme d'indice $n + 1$; c'est le terme qui suit le terme d'indice n, c'est-à-dire u_n . On ne doit pas le confondre avec $u_n + 1$ qui est la somme de u_n , le terme d'indice n, et de 1.
- De même u_{n-1} est le terme d'indice $n - 1$; il précède le terme u_n .

Indice	p	$p+1$	$p+2$	…	$n-1$	n	$n+1$
Terme	u_p	u_{p+1}	u_{p+2}	…	u_{n-1}	u_n	u_{n+1}

Terme initial **Trois termes consécutifs**

On étudiera essentiellement deux façons de définir ou générer une suite : par une formule explicite et « par récurrence ».

1.1 Définir une suite par une formule explicite

On définit dans ce cas la suite u par une expression du type : $u_n = f(n)$, où f est une fonction numérique.

On peut alors **calculer directement chaque terme à partir de son indice**.

DÉFINITION 2

Soit a un réel et f une fonction définie sur $[a ; +\infty[$.
On peut définir une suite u en posant pour tout entier $n \geq a$, $\boldsymbol{u_n = f(n)}$.

Exemple :

Soit la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = \sqrt{2n+6}$.

Ainsi pour tout entier $n \geq 0$, $u_n = f(n)$ où f est définie sur $[-3 ; +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{2x+6}$.

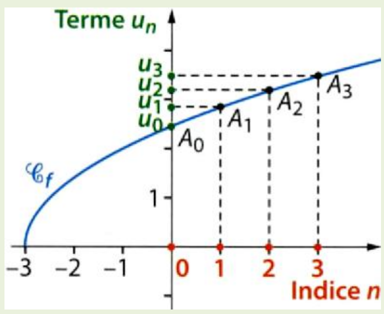
$u_0 = f(0) = \sqrt{2 \times 0 + 6} = \sqrt{6}$;

$u_1 = f(1) = \sqrt{2 \times 1 + 6} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$;

$u_2 = f(2) = \sqrt{10}$;

$u_{100} = f(100) = \sqrt{206}$…

Graphiquement, les termes de la suite u sont les ordonnées des points $A_n(n ; u_n)$ d'abscisses entières de la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de f.



Exercice corrigé : ***Travailler sur des indices***

1) Soit la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n^2 - n$.

a) Calculer u_0 , u_{10} et u_{50} .

b) Exprimer u_{n-1} , u_{n+1} et u_{2n} en fonction de n.

c) Démontrer que pour tout entier n, $u_{n+1} = u_n + 2n$.

2) Soit la suite v définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = 2^n (n^2 - 1)$.

Démontrer que pour tout entier n, $v_{n+1} - v_n = 2n (n^2 + 4n + 1)$.

Solution :

1) a) $u_0 = 0^2 - 0 = 0$;
$u_{10} = 10^2 - 10 = 90$;
$u_{50} = 50^2 - 50 = 2\,450$.

b) Pour tout entier n : $u_{n-1} = (n-1)^2 - (n-1)$
$u_{n-1} = n^2 - 2n + 1 - n + 1 = n^2 - 3n + 2$;

c) $u_{n+1} = (n+1)^2 - (n+1) = n^2 + n$;
$u_{2n} = (2n)^2 - 2n = 4n^2 - 2n$.

d) Pour tout entier n :
$u_{n+1} - u_n = (n^2 + n) - (n^2 - n) = 2n$.
Donc pour tout entier n, $u_{n+1} = u_n + 2n$.

Méthode :

On remplace n dans u_n par l'indice voulu. Ainsi :

- u_0 est obtenu en remplaçant n par 0 dans u_n .
- u_{n-1} est obtenu en remplaçant n par $n-1$ dans u_n (attention à bien mettre des parenthèses !)

On remplace u_{n+1} et u_n par leurs expressions en fonction de n, et on simplifie l'expression obtenue.

2) Pour tout entier n : $v_{n+1} = 2^{n+1} [(n+1)^2 - 1] = 2^{n+1} (n^2 + 2n + 1 - 1) = 2^{n+1} (n^2 + 2n)$.
Donc $v_{n+1} - v_n = 2^{n+1} (n^2 + 2n) - 2^n (n^2 - 1)$
$v_{n+1} - v_n = 2^n \times 2^1 (n^2 + 2n) - 2^n (n^2 - 1)$
$v_{n+1} - v_n = 2^n [2(n^2 + 2n) - (n^2 - 1)]$
$v_{n+1} - v_n = 2^n (2n^2 + 4n - n^2 + 1)$.
Donc pour tout entier n, $v_{n+1} - v_n = 2^n (n^2 + 4n + 1)$.

1.2 Définir une suite « par récurrence »

On donne dans ce cas la valeur du premier terme de la suite et un procédé appelé **relation de récurrence qui permet de calculer un terme à partir du précédent**.
Ce procédé permet de calculer le deuxième terme à partir du premier, puis le troisième à partir du deuxième, etc.

Commentaire :

Le « principe de récurrence » est une propriété fondamentale dans la construction des nombres. On peut le résumer ainsi :
« En partant de 0, et en ajoutant 1 à chaque étape, on construit l'ensemble des entiers naturels ».

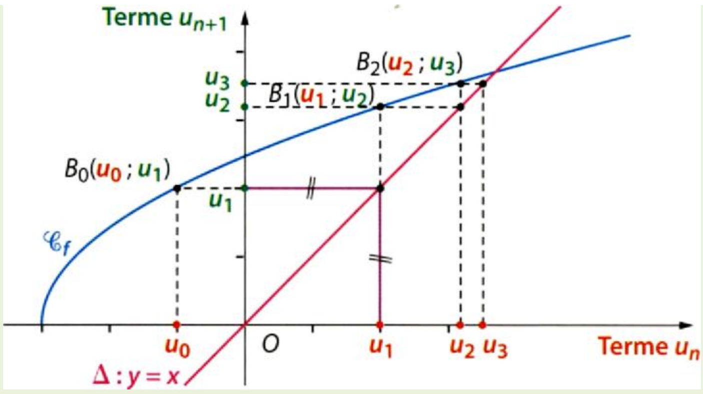
DÉFINITION 3

Soit f une fonction définie sur un ensemble I.
On suppose que : si $x \in$ I, alors $f(x) \in$ I.
Soit a un nombre réel de I et p un entier.
On peut alors définir une suite u en posant : $\begin{cases} \boldsymbol{u_p = a} \\ \text{pour tout entier } n \geq p,\ \boldsymbol{u_{n+1} = f(u_n)} \end{cases}$.

Exemple :

Soit la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = -1$ et $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 6}$.
Ainsi, pour tout entier $n \geq 0$, $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est définie sur $[-3 ; +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{2x + 6}$.
$u_1 = f(u_0) = \sqrt{2u_0 + 6} = \sqrt{2 \times (-1) + 6} = 2$;
$u_2 = f(u_1) = \sqrt{2u_1 + 6} = \sqrt{2 \times 2 + 6} = \sqrt{10}$; ...
Avec ce procédé, pour calculer u_{100} , il faut connaître u_{99} , u_{98} , ...

Graphiquement, $B_0(u_0\,;u_1)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}_f$.
Pour déterminer $B_1(u_1\,;\,u_2)$, il faut placer u_1, l'abscisse de B_0, en abscisse.
On « reporte » donc u_1 sur l'axe (Ox) en utilisant la droite Δ d'équation $y = x$.
On poursuit de même pour construire $B_2(u_2\,;\,u_3)$, $B_3(u_3\,;\,u_4)$, …



Remarque :

Lorsqu'une suite est définie par récurrence, on ne peut pas calculer directement un terme à partir de son rang, il faut procéder « de proche en proche » : pour calculer le dixième terme, on utilise la valeur du neuvième, obtenue elle-même grâce au huitième terme, … Finalement, le calcul d'un terme nécessite de calculer tous les précédents !

DÉFINITION 4

Soit p un entier, et u et v deux suites définies à partir du rang p.
Les suites u et v sont **égales** si pour tout entier $n \geq p$, $\boldsymbol{u_n = v_n}$.

Remarque :

En particulier, si les suites u et v ont le **même premier terme** et vérifient la **même relation de récurrence**, alors elles sont **égales**.

Exercice corrigé : ***Calculer des termes d'une suite***

Soit la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = (-2)^n + 3$.
Soit la suite v définie par $v_0 = 4$ et pour tout entier n, $v_{n+1} = -2v_n + 9$.

1) Pour chacune des suites u et v :

a) Déterminer les valeurs des trois premiers termes.

b) Vérifier à la calculatrice les valeurs obtenues à la question 1.a).

2) Quelle conjecture peut-on émettre sur les suites u et v ? Démontrer cette conjecture.

Solution :

1) a) Les trois premiers termes sont u_0, u_1 et u_2.
Pour la suite u, définie de façon explicite :
$u_0 = (-2)^0 + 3 = 1 + 3 = 4$;
$u_1 = (-2)^1 + 3 = 1$;
$u_2 = (-2)^2 + 3 = 7$.
Pour la suite v, définie par une formule de récurrence :
v_0 est connu : $v_0 = 4$.
$v_1 = -2v_0 + 9 = -2 \times 4 + 9 = 1$;
$v_2 = -2v_1 + 9 = -2 \times 1 + 9 = 7$.

Méthode :

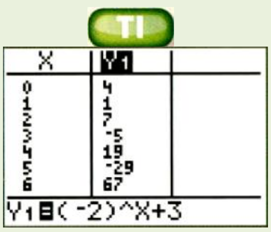
Cas d'une suite définie par $u_n = f(n)$:

- On calcule l'image par f de l'indice voulu (0, puis 1, …) ;
- À la calculatrice, on entre en Y1 l'expression de f, et on tabule f à partir du rang initial (ici 0) avec un pas de 1.

Cas d'une suite définie par récurrence : $v_{n+1} = (v_n)$:

- v_1 est l'image par f de v_0 ; v_2 est l'image par f de v_1, etc. On calcule ainsi de proche en proche les ternies demandés.

b)



À la calculatrice :

- on stocke le premier terme dans la mémoire de la calculatrice (avec la touche EXE de Casio ou entrer de TI) ;
- on tape l'expression de f en remplaçant v_n par SHIFT Asn (−) ou 2nde rép (−) ;
- on valide autant de fois que nécessaire.

2) On a : $u_0 = v_0$, $u_1 = v_1$ et $u_2 = v_2$.
On conjecture que les suites sont égales.
Pour tout entier n, $u_{n+1} = (-2)^{n+1} + 3 = -2 \times (-2)^n + 3$.
Or $u_n = (-2)^n + 3$. D'où $(-2)^n = u_n - 3$.
Donc, pour tout n, $u_{n+1} = -2 \times (-3) + 3 = -2u_n + 9$.
Les suites u et v vérifient la même relation de récurrence et ont le même premier terme : les suites u et v sont égales.

2 SENS DE VARIATION D'UNE SUITE

DÉFINITIONS 5

Soit une suite u et un entier p.

- La suite u est **croissante à partir du rang p** si pour tout entier $n \geq p$, $\boldsymbol{u_{n+1} \geq u_n}$.
- La suite u est **décroissante à partir du rang p** si pour tout entier $n \geq p$, $\boldsymbol{u_{n+1} \leq u_n}$.
- La suite u est **monotone à partir du rang p** si elle est soit croissante à partir du rang p, soit décroissante à partir du rang p.
- La suite u est **constante** ou **stationnaire à partir du rang p** si pour tout entier $n \geq p$, $u_{n+1} = u_n$.

Lorsqu'on ne précise pas « à partir du rang p », cela signifie que la suite est croissante, décroissante, monotone, constante à partir du rang de son premier terme.

Étudier le sens de variation d'une suite consiste à préciser si la suite est croissante ou décroissante.

Remarque :

Comme pour les fonctions, lorsqu'on remplace les inégalités larges par des inégalités strictes, on parle de suite **strictement croissante**, **strictement décroissante**, **strictement monotone**.

Exemples :

1) La suite u de terme général $u_n = \dfrac{5}{n+1}$ est strictement décroissante.

En effet, pour tout entier n, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{5}{n+2} - \dfrac{5}{n+1} = \dfrac{-5}{(n+1)(n+2)}$.

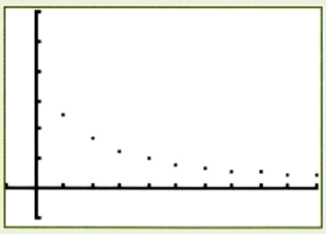
Donc pour tout entier n, $u_{n+1} - u_n < 0$, c'est-à-dire $u_{n+1} < u_n$.

À l'aide de la calculatrice, **numériquement**, les termes sont de plus en plus petits.

n	u(n)
0	5
1	2.5
2	1.6667
3	1.25
4	1
5	.83333
6	.71429

n=0

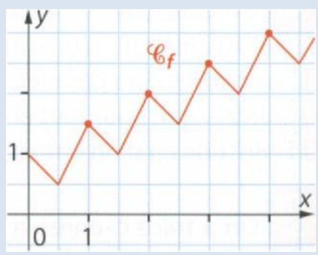
Graphiquement, les points de coordonnées $(n\,;\,u_n)$ sont placés de plus en plus « bas ».



2) La suite v de terme général $v_n = 5 \times (-0{,}8)^n$ n'est pas monotone.
En effet, chaque terme d'indice pair, qui est positif, est supérieur au terme précédent d'indice impair, qui est négatif, et supérieur au terme suivant, également négatif.

Remarque :

La réciproque de la propriété est fausse.
Soit la fonction f définie par la courbe représentative ci-contre et la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = f(n)$.



On constate que pour tout entier n, $u_n = 1 + \dfrac{n}{2}$.

La suite u est strictement croissante, mais la fonction f n'est pas monotone.

PROPRIÉTÉ 1

Soit une fonction f définie sur un intervalle $[a\ ;+\infty[$. Soit un entier $p \geq a$ et la suite i définie pour tout entier $n \geq p$ par $u_n = f(n)$.

- Si la fonction f est (strictement) croissante sur $[p\ ;+\infty[$, alors la suite u est (strictement) croissante à partir du rang p.
- Si la fonction f est (strictement) décroissante sur $[p\ ;+\infty[$, alors la suite u est (strictement) décroissante à partir du rang p.

Démonstration :

Voir la démonstration à l'exercice 67, page 156.

Exercice corrigé : ***Étudier les variations d'une suite***

Soit les suites u, v et w définies sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = \dfrac{2^n}{n+1}$; $v_n = \dfrac{3-n}{n+1}$; $\begin{cases} w_0 = 1 \\ w_{n+1} = \dfrac{1}{w_n} + 1 \end{cases}$.

Étudier le sens de variation des suites u, v et w.

Solution :

a) Étude de la suite u.
Il semble que la suite u est croissante.

n	u(n)
0	1
1	1
2	1.3333
3	2
4	3.2
5	5.3333
6	9.1429
n=0	

Méthode :
Pour conjecturer le sens de variation d'une suite, on peut calculer les premiers termes de la suite.
Pour démontrer qu'une suite u est monotone, il s'agit, pour tout entier n, de comparer u_n et u_{n+1}.

Pour tout entier n, on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2^{n+1}}{(n+1)+1} - \frac{2^n}{n+1} = \frac{2^n \times 2}{n+2} - \frac{2^n}{n+1} = \frac{2^n(2n+2) - 2^n(n+2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{2^n \times n}{(n+1)(n+2)}.$$

Donc, pour tout entier n, $u_{n+1} - u_n > 0$: la suite u est croissante.

On peut étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.

b) Étude de la suite v.
Il semble que la suite v est décroissante.

n	u(n)
0	3
1	1
2	.33333
3	0
4	-.2
5	-.3333
6	-.4286
n=0	

Pour tout entier n, $v_n = f(n)$ où f est la fonction définie sur $[0\ ;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{3-x}{x+1}$.

f est dérivable sur $[0\ ;+\infty[$ et pour tout $x \geq 0$:

$$f'(x) = \frac{-1(x+1) - 1(3-x)}{(x+1)^2} = \frac{-4}{(x+1)^2} < 0.$$

La fonction f est strictement décroissante sur $[0\ ;+\infty[$.
Donc la suite v est strictement décroissante.

Lorsque la suite est définie par une formule explicite $u_n = f(n)$, on peut utiliser les variations de la fonction f dans le cas où f est monotone.

c) Étude de la suite w.

$w_0 = 1$; $w_1 = \dfrac{1}{w_0} + 1 = \dfrac{1}{1} + 1 = 2$, donc $w_0 < w_1$ et la suite w n'est pas décroissante ;

$w_2 = \dfrac{1}{w_1} + 1 = \dfrac{1}{2} + 1 = \dfrac{3}{2}$, donc $w_1 > w_2$ et la suite w n'est pas croissante.

La suite w n'est pas monotone.

Pour démontrer qu'une suite n'est pas monotone, il suffit de trouver un contre-exemple pour la croissance et la décroissance.

3 COMPORTEMENT D'UNE SUITE À L'INFINI

Exemple 1 :

Soit la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = n^2$.

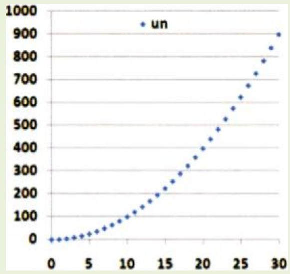
On conjecture que : **u_n peut être rendu aussi grand qu'on veut si n est choisi suffisamment grand**.

Pour tout entier $n > 1\,000$, on a $u_n > 10^6$;

pour tout entier $n > 10^6$, $u_n \geq 10^{12}$.

Plus généralement, pour tout réel $\mathrm{M} \geq 0$, dès que $n \geq \sqrt{\mathrm{M}}$, on a $u_n \geq \mathrm{M}$.

Représentation graphique de la suite u :



NOTATION 1

On dit que u **diverge vers** $+\infty$ ou qu'elle admet $+\infty$ comme limite et on note : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Exemple 2 :

Soit la suite v définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = \dfrac{(-1)^n}{n+2}$.

On conjecture que : **v_n peut être rendu aussi proche de 1 qu'on veut si n est choisi suffisamment grand**.

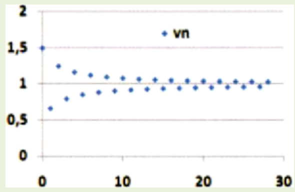
Pour tout entier $n > 98$, on a $|v_n - 1| < 0{,}01$;

pour tout $n > 10^6 - 2$, $|v_n - 1| < 10^{-6}$.

Plus généralement, pour tout écart $e > 0$, dès que $n > \dfrac{1}{e} - 2$, on a : $|v_n - 1| < e$,

c'est-à-dire que la distance entre v_n et 1 est inférieure à e.

Représentation graphique de la suite v :



NOTATION 2

On dit que v **converge vers 1** et on note : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 1$.

Exemple 3 :

Soit la suite w définie sur $\mathbb{N}$ par : $w_n = -2n^2 + 2$.

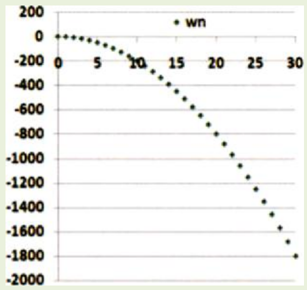
On conjecture que : **w_n est négatif et peut être rendu aussi grand qu'on veut si n est choisi suffisamment grand**.

Pour tout entier $n > 708$, on a $w_n \leq -10^6$;

pour tout $n \geq 707\,107$, $w_n \leq -10^{12}$.

Plus généralement, pour tout réel $\mathrm{M} \geq 0$, dès que $n \geq \sqrt{\dfrac{\mathrm{M}}{2} + 1}$, on a $w_n \leq \mathrm{M}$.

Représentation graphique de la suite w :



NOTATION 3

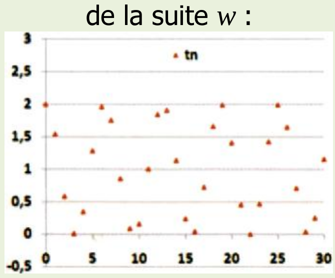
On dit que w **diverge vers** $-\infty$ ou qu'elle admet $-\infty$ comme limite et on note : $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = -\infty$.

Exemple 3 :

Soit la suite t définie sur $\mathbb{N}$ par : $t_n = \cos n + 1$.

On conjecture que : t_n ne se stabilise autour d'aucune valeur réelle : on dit que t diverge et n'admet pas de limite.

Représentation graphique de la suite w :



Remarque :

Les suites étant définies sur des entiers positifs, on s'intéresse exclusivement à leur comportement en $+\infty$.

Exercice corrigé : ***Déterminer la limite éventuelle d'une suite numérique***

Soit les suites u et v définies sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = \dfrac{2n}{n+1}$ et $v_n = (-1)^n$.

Pour chaque suite :

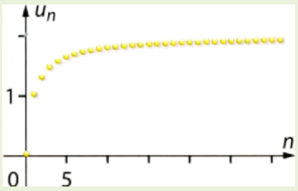
a) **conjecturer le comportement à l'infini : la suite paraît-elle converger ? diverger ?**

b) **élaborer une démarche permettant de conforter la conjecture.**

Solution :

Étude de la suite u.

a) La représentation graphique ci-contre permet de conjecturer que la suite u converge vers 2.



b) On commence par trouver un rang à partir duquel la distance entre u_n et 2 est inférieure à $0{,}01$:

$|u_n - 2| < 0{,}01$ équivaut à : $\left|\dfrac{2n}{n+1} - 2\right| < 0{,}01$;

$\left|\dfrac{-2}{n+1}\right| < 0{,}01$; $\quad \dfrac{n+1}{2} > 100$; $\quad n > 199$.

Ainsi pour tout $n \geq 200$, la distance entre u_n et 2 est inférieure à $0{,}01$.

On peut remarquer que : $u_n = \dfrac{2(n+1)-2}{n+1} = 2 - \dfrac{2}{n+1}$.

Pour n « très grand », $\dfrac{2}{n+1}$ est très proche de 0, et donc u_n très proche de 2.

Il semble confirmé que la suite u converge vers 2.
On écrit $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$.

Méthode :

Pour conjecturer le comportement à l'infini d'une suite, on peut représenter graphiquement la suite ou calculer les termes de la suite pour des rangs « grands ».

Pour conforter la conjecture, on peut chercher un rang à partir duquel la distance entre u_n et 2 est inférieure à $0{,}01$, par exemple.

Étude de la suite v.

a) Le tableau de valeurs de v permet de conjecturer que la suite v diverge.

b) Les termes de v d'indice pair valent 1, ceux d'indice impair valent -1.
La suite v ne se stabilise autour d'aucune valeur, et oscille sans cesse de -1 à 1 : la suite v diverge.

n	$u(n)$	
0	1	
1	-1	
2	1	
3	-1	
4	1	
5	-1	
6	1	

u(n)=(-1)^n