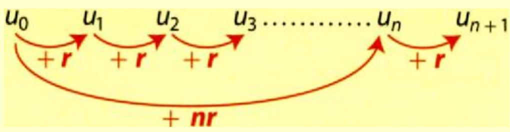
Ch.11 : Suites arithmétiques et géométriques

Dans tout le chapitre, les entiers considérés sont naturels.

1 Suites arithmétiques

Définition 1

On dit qu'une suite u est **arithmétique** si, à partir de son premier terme, chaque terme est obtenu en ajoutant au précédent un même nombre.
Ainsi, il existe un réel r tel que pour tout entier n, $\boldsymbol{u_{n+1} = u_n + r}$.
Le nombre r est appelé **raison de la suite arithmétique u** ; il est égal à la différence entre deux termes consécutifs quelconques :
pour tout entier n, $\boldsymbol{r = u_{n+1} - u_n}$.



Exemples :

1) La suite $\{1 ; 3 ; 5 ; 7 ; \dots\}$ des entiers impairs, de terme général $u_n = 2n + 1$, est une suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 2.
2) La suite v de terme général $v_n = n^2$ n'est pas une suite arithmétique.
En effet, $v_0 = 0$; $v_1 = 1$; $v_2 = 4$, ... : pour passer d'un terme au suivant, on n'ajoute pas toujours le même nombre.

Théorème 1

Soit u une suite arithmétique de raison r.
Alors pour tout entier n, $\boldsymbol{u_n = u_0 + n \times r}$.
Plus généralement, pour tous entiers p et k, $\boldsymbol{u_p = u_k + (p - k) \times r}$.

Démonstration :

À partir de u_0 , on obtient u_n en ajoutant n fois la raison : $u_n = u_0 + r + r + \dots + r = u_0 + n \times r$.
On a alors $u_p = u_0 + p \times r$ et $u_k = u_0 + k \times r$.
Donc $u_p - u_k = u_0 + p \times r - u_0 - k \times r = (p - k) \times r$, soit $u_p = u_k + (p - k)\, r$.

Théorème 2

Soit u une suite arithmétique de raison r.

- **Si $r > 0$**, la suite u est **strictement croissante**.
- **Si $r < 0$**, la suite u est **strictement décroissante**.
- **Si $r = 0$**, la suite u est **constante**.

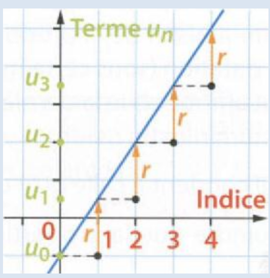
Démonstration :

Voir la démonstration à l'exercice 35, page 183.
La démonstration du théorème est très simple : r est égal à la différence entre deux termes consécutifs quelconques.

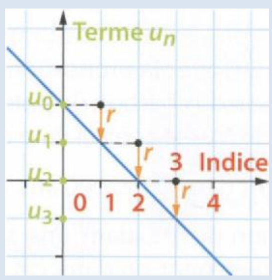
Illustration :

Graphiquement, les points de coordonnées $(n ; u_n)$ appartiennent à la droite d'équation $y = u_0 + rx$. Son coefficient directeur est r.

Si $r > 0$, la fonction affine $x \longmapsto u_0 + rx$ est croissante : les termes sont de plus en plus grands.



Si $r < 0$, la fonction affine $x \longmapsto u_0 + rx$ est décroissante : les termes sont de plus en plus petits.



Exercice corrigé : ***Démontrer qu'une suite est, ou n'est pas, arithmétique***

Les suites suivantes sont-elles arithmétiques ? Si oui, déterminer le premier terme et la raison.

1) **Pour tout entier n, $u_n = 7 - 4n$.**

2) **Pour tout entier n, $v_n = n^2 - 1$.**

3) **Pour tout entier n, $w_n = (n+1)^2 - n^2$.**

Solution :

1) $u_0 = 7 - 4 \times 0 = 7$; $u_1 = 7 - 4 \times 1 = 3$; $u_2 = 7 - 4 \times 2 = -1$.
Il semble que la différence entre deux termes consécutifs soit –4, donc indépendante de n.
Pour tout entier n : $u_{n+1} - u_n = [7 - 4(n+1)] - (7 - 4n) = 4$.
La suite u est arithmétique de premier terme $u_0 = 7$ et de raison –4.

2) $v_0 = 0^2 - 1 = -1$; $v_1 = 1^2 - 1 = 0$; $v_2 = 2^2 - 1 = 3$.
On a $v_1 - v_0 = 1$ différent de $v_2 - v_1 = 3$.
Donc la suite v n'est pas arithmétique.

Méthode :

- Avant toute chose, calculer les trois premiers termes de la suite pour conjecturer le résultat.
- Pour démontrer qu'une suite u est arithmétique, on prouve que la différence $u_{n+1} - u_n$ est constante, c'est-à-dire indépendante de n.
- Pour démontrer qu'une suite u n'est pas arithmétique, il suffit de trouver un exemple montrant que la différence entre deux termes consécutifs n'est pas constante.

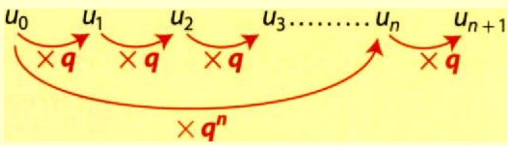
3) On a $w_0 = 1$; $w_1 = 3$; $w_2 = 5$: la différence entre deux termes consécutifs semble constante et égale à 2.
Pour tout entier n : $w_{n+1} - w_n = [(n+2)^2 - (n+1)^2] - [(n+1)^2 - n^2]$.
En développant, on trouve : $w_{n+1} - w_n = 2$.
Donc la suite w est arithmétique de premier terme $w_0 = 1$ et de raison 2.

2 SUITES GÉOMÉTRIQUES

DÉFINITION 2

On dit qu'une suite u est géométrique si, à partir de son terme initial, chaque terme est obtenu en multipliant le précédent par un même nombre.
Ainsi, il existe un réel q tel que pour tout entier n, $u_{n+1} = u_n \times q$.
Le nombre q est appelé **raison de la suite géométrique u**.
Dans le cas où la suite u ne s'annule pas, q est égal au quotient de deux termes consécutifs quelconques :

$\boldsymbol{q = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}}$ (réel fixé indépendant de l'entier n).



Exemples :

1) La suite $\{1 ; 2 ; 4 ; 8 ; \ldots\}$ des puissances de 2, de terme général $u_n = 2^n$, est une suite géométrique de premier terme 1 et de raison 2.

2) La suite v de terme général $v_n = (n+1)^2$ n'est pas une suite géométrique.
En effet, $v_0 = 1$; $v_1 = 4$; $v_2 = 9$, …
Pour passer d'un terme au suivant, on ne multiplie pas toujours par le même nombre.

THÉORÈME 3

Soit u une suite géométrique de raison q non nulle. Alors pour tout entier n, $\boldsymbol{u_n = u_0 \times q^n}$.
Plus généralement, pour tous entiers p et k, $\boldsymbol{u_p = u_k \times q^{p-k}}$.

Démonstration :

À partir de u_0, on obtient u_n en multipliant n fois par la raison : $u_n = u_0 \times q \times q \times \ldots \times q = u_0 \times q^n$.
On a alors $u_p = u_0 \times q^p$ et $u_k = u_0 \times q^k$.
Comme $q \neq 0$, $u_0 = \dfrac{u_k}{q^k}$, alors $u_p = \dfrac{u_k}{q^k} \times q^p$, soit $u_p = u_k \times q^{p-k}$.

THÉORÈME 4

Soit q un réel non nul.

- **Si $q > 1$,** la suite (q^n) est **strictement croissante.**
- **Si $q = 1$,** la suite (q^n) est **constante égale à 1.**
- **Si $0 < q < 1$,** la suite (q^n) est **strictement décroissante.**
- **Si $q = 0$,** la suite (q^n) est **constante égale à 0,** à partir du rang 1.
- **Si $q < 0$,** la suite (q^n) **n'est pas monotone.**

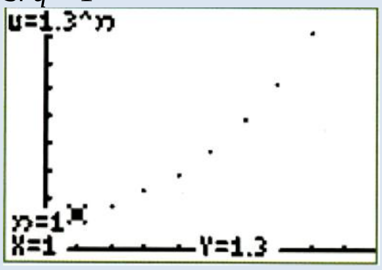
Démonstration :

Voir la démonstration à l'exercice 54, page 185.

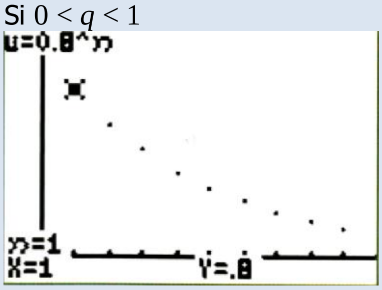
Illustration :

Graphiquement, à l'aide de la calculatrice :

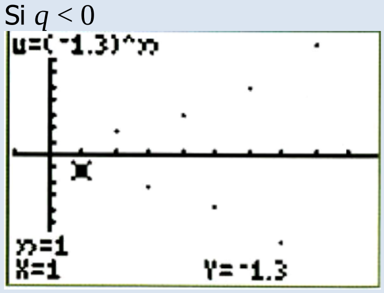
Si $q > 1$



Si $0 < q < 1$



Si $q < 0$



Exercice corrigé : ***Démontrer qu'une suite est, ou n'est pas, géométrique***

Les suites u, v et w sont-elles géométriques ? Si oui, en donner le premier terme et la raison.

Pour tout entier n : **a)** $u_n = \dfrac{-2}{5^n}$; **b)** $v_n = \dfrac{2^{2n}}{3^{3n}}$; **c)** $w_{n+1} = -w_n + 3$ **et** $w_0 = -4$.

Solution :

a) $u_0 = \dfrac{-2}{5^0} = \dfrac{-2}{1} = -2$; $u_1 = \dfrac{-2}{5^1} = \dfrac{-2}{5}$; $u_2 = \dfrac{-2}{5^2} = \dfrac{-2}{25}$.

On conjecture que pour passer d'un terme au suivant, on multiplie par $\dfrac{1}{5}$.

Pour tout entier n, $u_{n+1} = \dfrac{-2}{5^{n+1}} = \dfrac{1}{5}\left(\dfrac{-2}{5^n}\right) = \dfrac{1}{5}\,u_n$.

La suite u est géométrique de premier terme $u_0 = -2$ et de raison $\dfrac{1}{5}$.

b) $v_0 =$- 1 ; $v_1 = \dfrac{4}{27}$; $v_2 = \dfrac{16}{729}$.

On conjecture que pour passer d'un terme au suivant, on multiplie par $\dfrac{4}{27}$.

La suite v est à termes strictement positifs. On a pour tout entier n :

$\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{2^{2n+2}}{3^{3n+3}} \times \dfrac{3^{3n}}{2^{2n}} = \dfrac{2^2}{3^3} = \dfrac{4}{27}$.

La suite v est géométrique de raison $\dfrac{4}{27}$ et de premier terme $v_0 = 1$.

Méthode :

Avant toute chose, on calcule les trois premiers termes.
Pour démontrer qu'une suite u est géométrique :

on exprime u_{n+1} sous la forme $q \times u_n$;

si les termes sont non nuls, on prouve que le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ est constant, c'est-à-dire indépendant de n.

c) $w_0 = -4$; $w_1 = 7$; $w_2 = -4$.
On constate que l'on ne multiplie pas toujours par un même nombre pour passer d'un terme au suivant : la suite w n'est pas géométrique.

Pour démontrer qu'une suite u n'est pas géométrique, il suffit de trouver un exemple montrant que le quotient de deux termes consécutifs n'est pas constant.

3 CALCULS DE SOMMES DE TERMES CONSÉCUTIFS

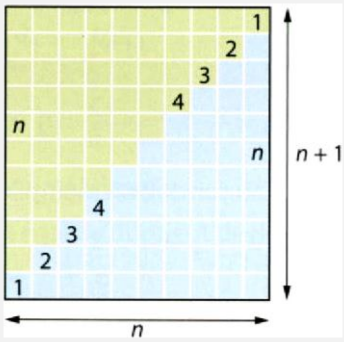
THÉORÈME 5

Soit un entier naturel n non nul. Alors la somme des n premiers entiers non nuls est :

$$\mathbf{1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}}.$$

Démonstration :

On dispose côte-à-côte des rectangles de largeur 1 et de hauteur $1, 2, 3, \ldots, n$, de façon à obtenir la surface bleue, et son symétrique la surface verte.
L'aire de chaque surface est : $1 + 2 + 3 + \ldots + n$.
Or la réunion des surfaces verte et bleue est un rectangle de côtés n et $n + 1$.
Donc : $2 \times (1 + 2 + 3 + \ldots + n) = n \times (n + 1)$; d'où le résultat.



Exemples :

1) $1 + 2 + 3 + \ldots + 10 = \dfrac{10 \times 11}{2} = 55.$

2) $10 + 11 + \ldots + 50 = (1 + 2 + 3 + \ldots + 50) - (1 + 2 + 3 + \ldots + 9) = \dfrac{50 \times 51}{2} - \dfrac{9 \times 10}{2} = 1\,230.$

Remarque :

Pour tout entier $n \geq 1$, la somme $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ est entière.
Le théorème ci-dessus permet ainsi d'affirmer que $n(n+1)$ est toujours entier. Ce qui se justifie aisément par ailleurs : comme les entiers n et $n + 1$ sont consécutifs, l'un des deux est pair ; le produit $n(n + 1)$ est donc un nombre pair.

THÉORÈME 6

Soit un entier naturel n non nul et q un réel différent de 1.

Alors : $\mathbf{1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}}.$

Démonstration :

On pose $S = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n$.
On a $q \times S = q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n+1}$.
En soustrayant : $S - q \times S = (1 + q + q^2 + \ldots + q^n) - (q + q^2 + \ldots + q^{n+1})$.
En annulant les sommes de termes opposés : $S - q \times S = 1 - q^{n+1}$.
D'où $(1 - q) \times S = 1 - q^{n+1}$, et comme $q \neq 1$, on obtient : $S = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

Remarque :

Dans le cas où $q = 1$, on a pour tout entier $n \geq 1$: $1 + q + q^2 + \ldots + q^n = 1 + 1 + 1 + \ldots + 1 = n + 1$.

Exemples :

1) $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{10} = \dfrac{1 - 2^{11}}{1 - 2} = 2\,047.$

2) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \ldots + \dfrac{1}{2^{10}} = \left(1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{2^{10}}\right) - 1 = \dfrac{1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{11}}{1 - \dfrac{1}{2}} - 1 = \dfrac{2^{11} - 1}{2^{10}} = \dfrac{1\,023}{1\,024}.$

On peut aussi calculer cette somme en factorisant par $\dfrac{1}{2}$:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{10}}=\frac{1}{2}\times\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^9}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{1-\frac{1}{2^{10}}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{2^{10}-1}{2^{10}}=\frac{1\,023}{1\,024}.$$

Exercice corrigé : ***Calculer des sommes***

1) Calculer les sommes suivantes : **a)** $\mathbf{S = 3 + 7 + 11 + \ldots + 203.}$

b) $\mathbf{S = 11 + 22 + 44 + \ldots + 360\,448.}$

2) Quelle est la somme des multiples de 7 compris entre 100 et 2 000 ?

Solution :

1) a) Les termes de la somme sont les termes consécutifs de la suite arithmétique de premier terme 3 et de raison 4.

Comme $7 = 3 + 4 \times 1$, … et $203 = 3 + 4 \times 50$,
$S = 3 + (3 + 4 \times 1) + (3 + 4 \times 2) + \ldots + (3 + 4 \times 50)$.

D'où $S = 3 + 3 + \ldots + 3 + 4 \times (1 + 2 + \ldots + 50)$.

Donc $S = 3 \times 51 + 4 \times \dfrac{50 \times 51}{2} = 5\,153$.

Méthode :

On identifie la nature de la suite mise jeu avec son premier terme et sa raison.
Pour calculer une somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique :
on écrit chaque terme en fonction du premier terme u_0 et de la raison r :
$u_n = u_0 + r \times n$;
on regroupe les termes identiques et on factorise au maximum ;
on utilise la formule : $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

b) Les termes de la somme sont les termes consécutifs de la suite géométrique de premier terme 11 et de raison 2.
Comme $22 = 11 \times 2$, … et $360\,448 = 11 \times 215$,
$S = 11 + 11 \times 2 + 11 \times 2^2 + \ldots + 11 \times 2^{15}$.
D'où $S = 11 \times (1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{15})$.

Donc $S = 11 \times \dfrac{1-2^{16}}{1-2} = 11 \times (2^{16} - 1) = 720\,885$.

Pour calculer une somme de termes consécutifs d'une suite géométrique :
on utilise l'expression de chaque terme en fonction du premier terme u_0 et de la raison q : $u_n = u_0 \times q^n$;
on factorise par u_0 ;
on utilise la formule :
$1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$, pour $q \neq 1$.

2) Le premier multiple supérieur à 7 est 105 et le dernier inférieur à 2 000 est 1 995.
Il faut calculer la somme $S = 105 + 112 + \ldots + 1\,995$.
La suite utilisée est une suite arithmétique de premier terme 105 et de raison 7.
Comme $1\,995 = 105 + 7 \times 270$:
$S = 105 + (105 + 7) + (105 + 7 \times 2) + \ldots + (105 + 7 \times 270)$
$S = 105 + 105 + \ldots + 105 + 7 \times (1 + 2 + \ldots + 270)$

Donc $S = 105 \times 271 + 7 \times \dfrac{270 \times 271}{2} = 284\,550$.

La somme cherchée est 284 550.

4 APPROCHE DU COMPORTEMENT À L'INFINI

THÉORÈME 7

Soit u une suite arithmétique de raison r non nulle.

- **Si $r > 0$**, la suite u diverge vers $+\infty$: $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
- **Si $r < 0$**, la suite u diverge vers $+\infty$: $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

Démonstration :

Soit u une suite arithmétique de raison $r \neq 0$.
Son ternie général est : $u_n = u_0 + n \times r$.

- Si $r > 0$, $u_n \geq 1\,000$ dès que $n \geq \dfrac{1\,000 - u_0}{r}$; $u_n \geq 10\,000$ dès que $n \geq \dfrac{10\,000 - u_0}{r}$.

  Plus généralement, pour tout réel M, $u_n \geq M$ dès que $n \geq \dfrac{M - u_0}{r}$: la suite u diverge vers $+\infty$.

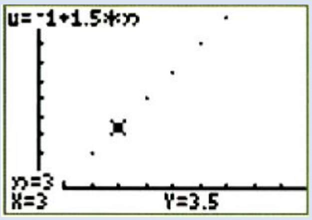
- Si $r < 0$, $u_n \leq -1\,000$ dès que $n \geq \dfrac{-1\,000 - u_0}{r}$; $u_n \leq -10\,000$ dès que $n \geq \dfrac{-1\,000 - u_0}{r}$.

  Plus généralement, pour tout réel M, $u_n \leq \mathrm{M}$ dès que $n \geq \dfrac{\mathrm{M} - u_0}{r}$: la suite u diverge vers $-\infty$.

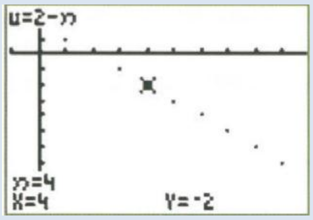
Illustration :

Graphiquement, à l'aide de la calculatrice :

pour $r = 1{,}5$ et $u_0 = -1$:



pour $r = -1$ et $u_0 = 2$:



THÉORÈME 7

Soit q un réel différent de 1.

- **Si $q > 1$**, la suite (q^n) diverge vers $+\infty$: $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$.
- **Si $-1 < q < 1$**, la suite (q^n) converge vers 0 : $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.
- **Si $q \leq -1$**, la suite (q^n) **diverge et n'admet pas de limite**.

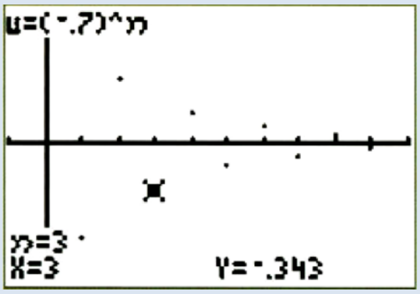
Démonstration :

Ce théorème est admis.

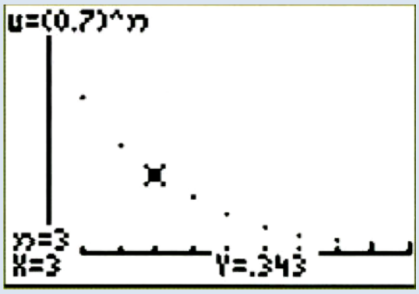
Illustration :

Graphiquement, à l'aide de la calculatrice :

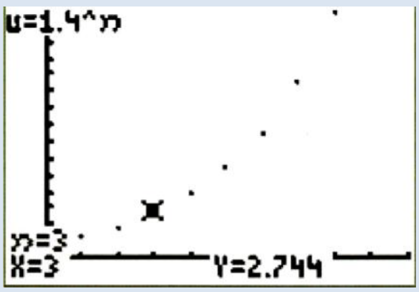
pour $q = 0{,}7$:



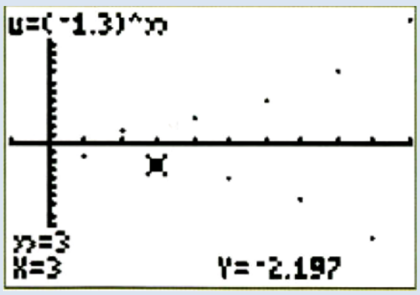
pour $q = -0{,}7$:



pour $q = 1{,}4$:



pour $q = -1{,}3$:



Exemple :

Soit u la suite géométrique de premier terme 3 et de raison $-0{,}5$.
Pour tout entier n, $u_n = 3 \times (-0{,}5)^n$.

Comme $-1 < q < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} (-0{,}5)^n = 0$.

Donc la suite u converge vers 0.
Numériquement, à l'aide de la calculatrice ou d'un tableur, on a::
$|u_n| < 0{,}001$ dès que $n \geq 12$;
$|u_n| < 10^{-6}$ dès que $n \geq 21$;
$|u_n| < 10^{-12}$ dès que $n \geq 42$.

Exercice corrigé : *Examiner le comportement à l'infini*

Soit u la suite arithmétique de raison $0,8$ et de premier terme $u_0 = -10$.
Soit v la suite géométrique de raison $1,2$ et de premier terme $v_0 = -2$.
Soit w la suite géométrique de raison $\frac{3}{4}$ et de premier terme $w_0 = 5$.

1) Déterminer les limites des suites u, v et w.

2) Déterminer le rang à partir duquel : a) $u_n \geq 10^6$; b) $v_n \leq -10^6$; c) $|w_n| \leq 10^{-6}$;

Solution :

1) • La suite u est arithmétique de raison $r = 0,8$, donc $r > 0$.
La suite u diverge donc vers $+\infty$: $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

• Comme $1,2 > 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} 1,2^n = +\infty$.

Le terme général de la suite v est $v_n = -2 \times (1,2)^n$.
En multipliant par -2 (négatif), on obtient une suite v qui diverge vers $-\infty$: $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$.

• Comme $-1 < \frac{3}{4} < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$.

Le terme général de la suite w est $w_n = 5 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

En multipliant par 5, on obtient une suite w qui converge vers 0 : $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 0$.

Méthode :

Pour déterminer la limite d'une suite arithmétique, on examine le signe de sa raison (positif ou négatif).

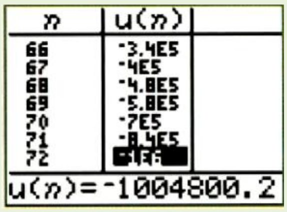
Pour déterminer la limite d'une suite géométrique de raison q, on détermine d'abord le comportement à l'infini de la suite (q^n) en regardant si q est :
- supérieur à 1 ;
- compris entre -1 et 1 ;
- inférieur à -1.

Puis on prend en compte le premier terme de la suite.

2) a) Le terme général de u est : $u_n = -10 + 0,8 \times n$.

On résout : $-10 + 0,8n \geq 10^6$ équivalent à : $n \geq \dfrac{10^6 + 10}{0,8}$, et à : $n > 1\,250\,012,5$, où n est un entier.
Donc $u_n \geq 10^6$ dès que $n \geq 1\,250\,013$.

b) La suite v est décroissante, car pour tout entier n, $v_{n+1} - v_n = -0,4(1,2)^n$, donc $v_{n+1} - v_n < 0$.
Il suffit de trouver un rang N tel que $v_\mathrm{N} \leq -10^6$: 72 convient.
Alors pour tout entier $n \geq 72$, on a $v_n \leq -10^6$.



Pour déterminer un rang à partir duquel $u_n > 10^6$, on peut, par exemple :
- si c'est possible, résoudre algébriquement l'inéquation ;
- sinon, utiliser les variations de la suite u et la calculatrice pour déterminer le plus petit rang N vérifiant $u_\mathrm{N} \geq 10^6$.

c) La suite w est décroissante, car pour tout entier n, $w_{n+1} - w_n = \dfrac{-5}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$, donc $v_{n+1} - v_n < 0$.
Il suffit de trouver un rang N tel que $|w| < 10^{-6}$: 54 convient.
Alors pour tout entier $n \geq 54$, on a $|w| < 10^{-6}$.