Ch.G3 : Géométrie dans l'espace

1 LA SPHÈRE ET LA BOULE

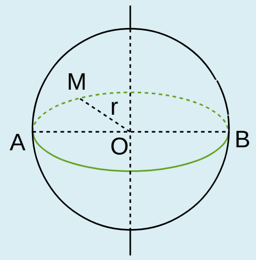
1.1 Définitions

DÉFINITION 1

- La **sphère** de centre O et de rayon r ($r > 0$) est **l'ensemble des points M** tels que **OM = r**.
- La **boule** de centre O et de rayon r ($r > 0$) est **l'ensemble des points M** tels que **OM ≤ r**.

Remarques :

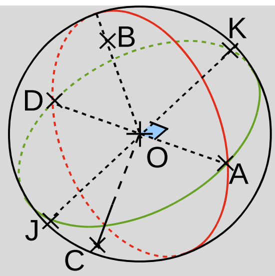
- On peut dire que la sphère est l'enveloppe de la boule (comme la peau d'une orange) tandis que la boule est l'intérieur.
- [AB] est un diamètre de la sphère (segment qui joint deux points de la sphère passant par le centre de la sphère).
- Le cercle vert est un **grand cercle** de la sphère (cercle de centre O et de rayon r).



Exercice n°1 page 228 ***Définitions***

Le dessin ci-contre, qui n'est pas en vraie grandeur, représente une sphère de centre O et de rayon 5 cm.
Les cercles rouge et vert sont des grands cercles.

a) Sur la figure, quels sont les points qui appartiennent à cette sphère ? Justifie.
b) En réalité, quelle est la longueur du segment [AD] ? Pourquoi ?
c) En réalité, quelle est la nature du triangle KAD ? Pourquoi ?
d) Calcule la longueur réelle du segment [AK].



a) Les points $\boxed{\text{A, D, J et K}}$ appartiennent à la sphère.

Le point B est à l'intérieur de la sphère puisqu'il est situé sur un rayon.

Le point C est situé à l'extérieur de la sphère car les pointilles sont prolongés par un segment.

b) AD = $\boxed{10 \text{ cm}}$. Le segment [AD] est le diamètre d'un grand cercle. Il passe par le centre de la sphère.

c) Le triangle KAD est un triangle rectangle en K car les points K, A et D appartiennent au même cercle et le segment [AD] est le diamètre de ce même cercle.

Si trois points appartiennent à un cercle tels que deux d'entre eux forment un diamètre alors il est rectangle.

D'autre part, la hauteur (KO) est confondue avec la médiane et la médiatrice issue de K.

Ainsi, le triangle KAD est un triangle $\boxed{\text{rectangle isocèle en K}}$.

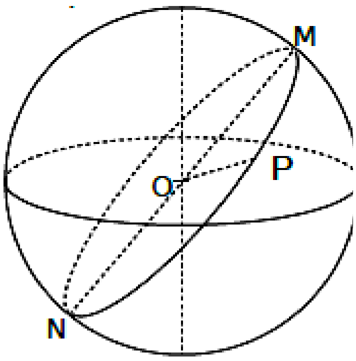
d) Le triangle KAO est rectangle en O. D'après le théorème de Pythagore, on a :

$KA^2 = OA^2 + OK^2$
$KA^2 = 5^2 + 5^2$
$KA^2 = 50$
KA = $\boxed{\sqrt{50} \text{ cm}}$ ≈ 7,1 cm arrondi au millimètre.

Exercice n°2 page 228 ***Perspective***

a) Représente en perspective une sphère de 4 cm de diamètre. On appelle O le centre de cette sphère.
b) Place sur cette sphère un point M puis un point N diamétralement opposé à M.
c) Place un point P à 2 cm du point O.
d) Indique la nature du triangle MPN. Justifie.

a)
b)
c)



d) Le point P se situe à 2 cm de O donc il appartient à la sphère.

Les points M, N et P appartiennent au même cercle de rayon 2 cm et [MP] est un diamètre de ce cercle.

Si trois points sont situés sur un cercle tel que deux d'entre eux forment un diamètre alors ce triangle est rectangle.

Le triangle MPN est donc un triangle $\boxed{\text{rectangle en P}}$.

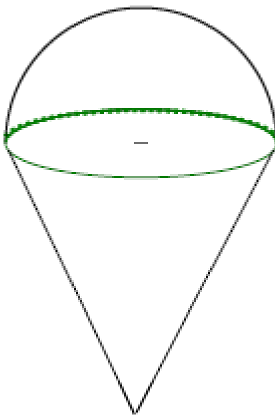
Exercice n°3 page 228

Un cornet de glace est assimilé à un cône de révolution de diamètre de base 6 cm et de hauteur 10 cm, surmonté d'une demi-boule de même diamètre.

a) Donne la hauteur totale du cornet de glace.
b) Représente ce cornet en perspective.

a) La hauteur totale du cône est $10 + 3 = \boxed{13 \text{ cm}}$.

b)



Exercice n°4 page 228 *Planète Terre*

On assimile la Terre à une sphère de rayon 6 378 km.
L'équateur et les méridiens sont des grands cercles de cette sphère.

a) Calcule la longueur de l'équateur.
b) Quelle est la distance entre le pôle Nord et le pôle Sud ?
c) L'aventurier Kévin Fog a réédité l'exploit de son arrière-grand-père : le tour du monde en quatre-vingts jours en survolant l'équateur à une hauteur de 1 000 m. Quelle a été sa vitesse moyenne en $km.h^{-1}$?

Source Wikipédia

a) La longueur de l'équateur est la longueur d'un cercle de 6 378 km de rayon.

On applique donc la formule $2 \times \pi \times$ Rayon

Longueur $= 2 \times \pi \times 6\,378$ km

Longueur $= 12\,756\,\pi$ km

Longueur $\approx \boxed{40\,074 \text{ km}}$ arrondi au km.

b) La distance théorique entre le pôle Nord et le pôle Sud est le diamètre d'un grand cercle. Elle est donc de $2 \times 6\,378 = \boxed{12\,756 \text{ km}}$.

c) Rayon en tenant compte de l'altitude : $6378 + 1 = 6379$.

Il a parcouru la distance de $2 \times \pi \times 6\,379 \approx 40\,080$ km.

Il y a 1 920 heures dans 80 jours.

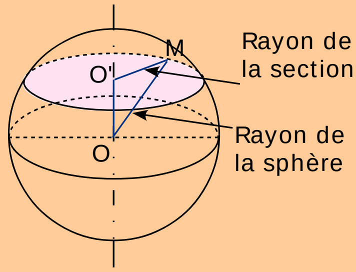
On a donc vitesse = $\dfrac{40\,080}{1\,920} \approx \boxed{20{,}9 \text{ km.h}^{-1}}$ valeur arrondie au dixième.

1.2 Section d'une sphère par un plan

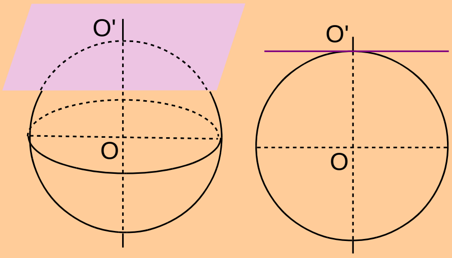
ex. 1 et 2

PROPRIÉTÉS 1

La section d'une sphère de centre O par un plan est un **cercle** de centre O′.
Lorsque le plan ne passe pas par le centre de la sphère, la droite (OO′) est perpendiculaire au plan de section.



Quand la distance OO′ correspond au rayon de la sphère, la section est alors réduite au point O′.
On dit que le plan est **tangent à la sphère en O′**.



Exemple 1 :

Une sphère de rayon 4 cm est coupée par un plan à 3 cm de son centre. Donne la nature et les dimensions de la section.

Solution :

La section d'une sphère par un plan est un cercle. M est un point de la section. La droite (OO′) est perpendiculaire au plan de section et en particulier, au rayon de la section [O′ M].
Donc le triangle OO′ M est rectangle en O′. D'après le théorème de Pythagore :

$OM^2 = O'M^2 + O'O^2$.

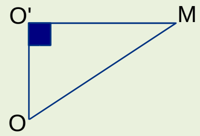
$4^2 = O'M^2 + 3^2$

$O'M^2 = 16 - 9$

$O'M^2 = 7$

d'où $O'M = \sqrt{7}$ cm.

Le rayon de la section de cette sphère mesure $\sqrt{7}$ cm.



Remarques :

- Le rayon de la section est toujours plus petit ou égal au rayon de la sphère.
- Dans le cas où le plan de section passe par le centre de la sphère, le rayon de la section est égal au rayon de la sphère. La section est alors appelée grand cercle.

Exercice du cours n°1 page 227

Une sphère de rayon 7 cm est coupée par un plan à 5 cm de son centre.
a) Quelle est la nature de la section ?
b) Représente la section en vraie grandeur.

a) La section d'une sphère par un plan est un $\boxed{\text{cercle}}$.

b) On appelle C le centre de la sphère, A le centre de la section et B un point de la section.
Dans le triangle ABC rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore :

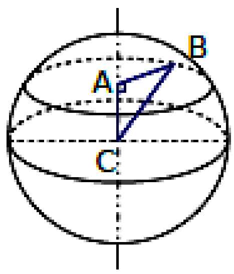
$BC^2 = AB^2 + AC^2$

$7^2 = AB^2 + 5^2$

$AB^2 = 49 - 25$

$AB^2 = 24$

$AB = \sqrt{24} \approx 4{,}9$ cm.

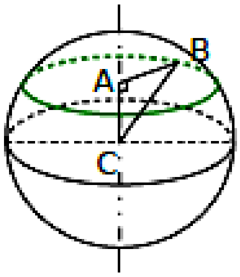


On trace un cercle de rayon environ 4,9 cm.

Exercice du cours n°2 page 227

Une sphère de rayon 13 cm est coupée par un plan à 12 cm du centre.
a) Représente la sphère et la section en perspective.
b) Quel est le rayon de la section ?

a)



b) Dans le triangle ABC rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore : $BC^2 = AB^2 + AC^2$

$13^2 = AB^2 + 12^2$

$AB^2 = 169 - 144$

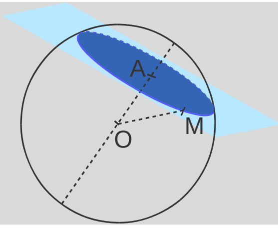
$AB^2 = 25$

$AB = \sqrt{25} = 5$

Le rayon de la section vaut $\boxed{5\text{ cm}}$.

Exercice n°13 page 229

Une boule de centre O, de rayon 8 cm, est coupée par un plan qui passe par le point A.
M est un point de cette section.
OA = 3 cm
a) Quelle est la nature de la section ?
b) Calcule l'aire exacte de la surface de cette section en cm^2.



a) Cette section est un $\boxed{\text{disque}}$.

b) Calculons le rayon de ce cercle : AM.

Le triangle AMO est un triangle rectangle en A.

D'après le théorème de Pythagore, on a $OM^2 = OA^2 + AM^2$

$AM^2 = OM^2 - OA^2$

$AM^2 = 8^2 - 3^2$

$AM^2 = 55$

$AM = \sqrt{55}$ valeur exacte.

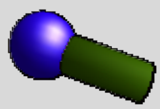
L'aire de cette section est donnée par la formule : $A = \pi \times \text{rayon}^2$

$A = \pi \times (\sqrt{55})^2$

$A = \boxed{55\,\pi}$ cm^2.

Exercice n°33 page 231 *Quille*

On veut construire une quille formée d'un cylindre de révolution surmonté d'une calotte sphérique.
On dispose d'un cylindre de 8 cm de diamètre et de hauteur 18 cm et d'une boule de 10 cm de diamètre. À quelle distance de son centre faut-il couper la boule pour pouvoir l'assembler exactement avec le cylindre ?

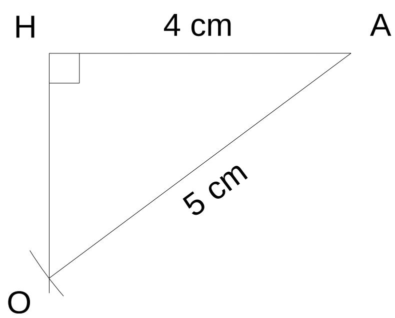


La section d'une sphère par un plan est une calotte sphérique.

Dans la figure ci-contre [OA] est un rayon de la sphère et [HA] est un rayon de la base du cylindre.

Dans le triangle HAO, rectangle en H, on a d'après le théorème de Pythagore : $OA^2 = OH^2 + HA^2$,

donc $OH^2 = OA^2 - HA^2$,



ici $OH^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$,

OH étant positif, la valeur qui convient pour OH est donc 3 ;

OH = 3 cm.

Il faut donc couper la boule à $\boxed{3 \text{ cm}}$ de son centre pour pouvoir l'assembler exactement avec le cylindre.

2 SECTIONS DE SOLIDES

2.1 Sections d'un parallélépipède rectangle

ex. 3 à 5

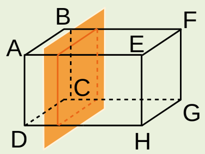
PROPRIÉTÉS 2

La section d'un parallélépipède rectangle par **un plan parallèle à une face** est un **rectangle** de mêmes dimensions que cette face.

La section d'un pavé droit ou d'un cube par **un plan parallèle à une arête** est un **rectangle**, dont l'une des dimensions correspond à la longueur de cette arête.

Exemples 2 :

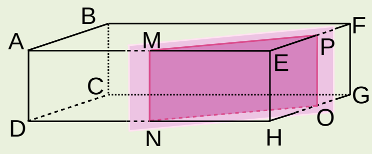
On coupe le pavé droit ABCDEFGH par un plan parallèle à la face ABCD. Donne la nature et les dimensions de la section.



Solution :

La section est un rectangle de mêmes dimensions que ABCD.

On coupe le pavé droit ABCDEFGH par un plan parallèle à l'arête [EH] de longueur 4 cm.



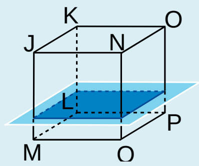
Donne la nature et les dimensions de la section MNOP, sachant que EM = 3 cm et EP = 2 cm.

Solution :

La section est le rectangle MNOP où MN = EH.
La face AEFB du pavé droit est un rectangle donc le triangle MEP est rectangle en E.
En appliquant le théorème de Pythagore dans ce triangle, on démontre que $MP = \sqrt{13}$.
Les dimensions de MNOP sont 4 cm et $\sqrt{13}$ cm.

Remarque :

Dans le cas particulier du cube, la section par un **plan parallèle à une face** est un **carré** de même dimension que cette face.



Exercice du cours n°3 page 227

Un pavé droit ABCDEFGH a pour dimensions AB = 5 cm, AD = 6 cm et AE = 8 cm. Il est coupé par un plan parallèle à l'arête [EH], le long de la diagonale [AF].

a) Représente en vraie grandeur la face ABFE et la section AFGD.
b) Détermine les dimensions exactes de cette section.
c) Donne la valeur arrondie au dixième de l'aire de cette section.

a) La face ABFE est un rectangle de dimensions AB = 5 cm et EA = 8 cm.

La section AFGD est un rectangle de dimensions AD = 6 cm et AF qui est la longueur de la diagonale du rectangle ABFE. (Il suffit donc d'utiliser le compas pour reporter la longueur obtenue dans la première figure.)

b) La section AFGD est parallèle à l'arête [EH] donc AFGD est un rectangle de dimensions AD = 6 cm et AF.

La face ABFE du pave droit est un rectangle donc le triangle AFE est rectangle en E.

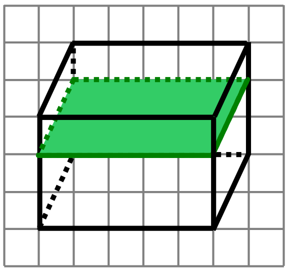
D'après le théorème de Pythagore : $AF^2 = AE^2 + EF^2$ soit $AF^2 = 8^2 + 5^2 = 64 + 25 = 89$. D'où $AF = \sqrt{89}$.

Les dimensions du rectangle AFGD sont $\boxed{6 \text{ cm et } \sqrt{89} \text{ cm}}$.

c) L'aire du rectangle AFGD est : $AF \times AG = \sqrt{89} \times 6 \approx \boxed{56{,}6 \text{ cm}^2}$ arrondie au dixième.

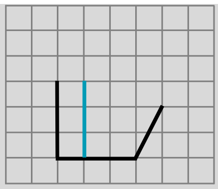
Exercice du cours n°4 page 227

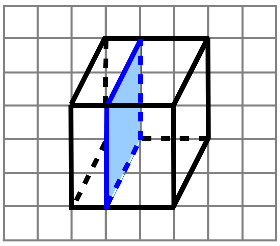
Reproduis la figure et complète le tracé du pavé droit, en noir et de la section parallèle aux faces horizontales, en vert.



Exercice du cours n°5 page 227

Reproduis la figure et complète le tracé du cube, en noir et de la section parallèle aux faces verticales, en bleu.

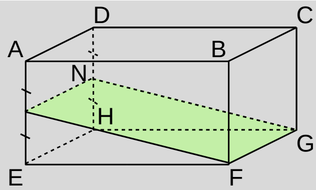




Exercice n°14 page 229 *Quelle figure ?*

a) Quelle est la nature de cette section ? Justifie.

b) Représente-la en grandeur réelle sachant que AB = 5 cm ; BC = 3 cm ; BF = 2 cm et que N est le milieu du segment [DH].



a) Cette section est un $\boxed{\text{rectangle}}$.

b) Ce rectangle a pour largeur 3 cm car FG = BC.

La longueur est GN. Le triangle GHN est un triangle rectangle en H. On a GH = AB = 5 cm et

$HN = \dfrac{BF}{2} = 1$ cm.

D'après le théorème de Pythagore, on a $GN^2 = GH^2 + HN^2$

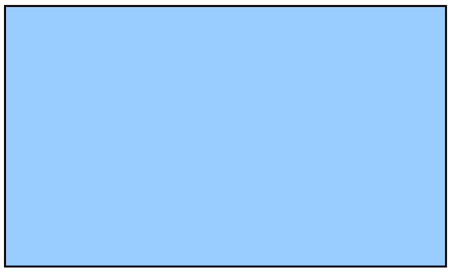
$GN^2 = 5^2 + 1^2$

$GN^2 = 26$

$GN = \sqrt{26}$ cm

$GN \approx 5,1$ cm.

On a donc la figure suivante :



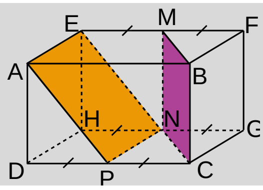
Exercice n°15 page 229 *Avec un pavé droit*

Un pavé droit ABCDEFGH est tel que AB = 6 cm ; BC = 4 cm et BF = 3 cm.

M, N et P sont les milieux respectifs de [EF], [HG] et [DC].

a) Quelle est la nature des quadrilatères AENP et BMNC ? Justifie ta réponse.

b) Compare les aires de ces deux quadrilatères.



a) Les quadrilatères AENP et BMNC sont des $\boxed{\text{rectangles}}$.

b)
- Comme P est le milieu de [CD], alors $DP = \frac{CD}{2} = \frac{6}{2} = 3$ cm.

  Dans le triangle rectangle ADP rectangle en D, d'après le théorème de Pythagore, on a :

  $AP^2 = AD^2 + DP^2$
  $AP^2 = 4^2 + 3^2$
  $AP^2 = 25$
  $AP = 5$ cm.

  On a donc $Aire_{AENP} = AE \times AP = 3 \times 5 = 15$ cm².
- Comme M est le milieu de [EF], alors $FM = \frac{EF}{2} = \frac{6}{2} = 3$ cm.

  Dans le triangle rectangle BFM rectangle en F, d'après le théorème de Pythagore, on a :

  $BM^2 = BF^2 + FM^2$
  $BM^2 = 3^2 + 3^2$
  $BM^2 = 18$
  $BM = \sqrt{18}$ cm.

  On a donc $Aire_{BMNC} = BM \times BC = 4 \times \sqrt{18} \approx 17$ cm² valeur arrondie au cm².

On a $\boxed{Aire_{BMNC} > Aire_{AENP}}$.

2.2 Sections d'un cylindre de révolution

ex. 6

PROPRIÉTÉS 3

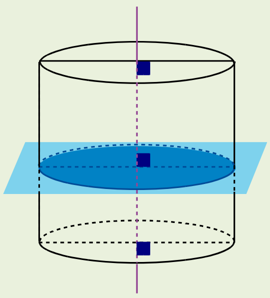
La section d'un cylindre de révolution par **un plan perpendiculaire à son axe** est un **cercle** de même rayon que la base.	La section d'un cylindre de révolution par un **plan parallèle** à son axe est un **rectangle**.

Exemples 3 :

On coupe un cylindre de révolution par un plan perpendiculaire à son axe. Donne la nature et les dimensions de la section.

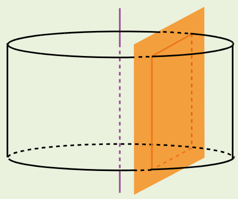
Solution :

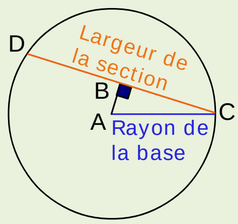
La section est un cercle de même rayon que la base.



On coupe un cylindre de révolution de hauteur 10 cm dont le rayon de la base est 3 cm, parallèlement à son axe, à 2 cm de celui-ci.
Donne la nature et les dimensions de la section.

Solution :

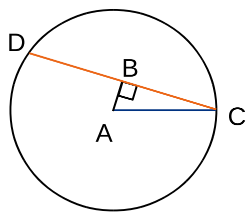




Vue de dessus

Exercice du cours n°6 page 227

La section d'un cylindre de révolution de hauteur 12 cm par un plan parallèle à son axe a pour largeur 8 cm. La distance entre l'axe et la section est 3 cm. Quel est le rayon de la base de ce cylindre ?



La largeur de la section est 8 cm donc DC = 8 cm.

Dans le triangle ACD isocèle en A, la hauteur issue de A et la médiane issue de A sont confondues. Donc [AB) est une médiane d'où B est le milieu de [DC]. On en déduit que BC = 4 cm.

La distance entre l'axe et la section est 3 cm donc AB = 3 cm.

Dans le triangle ABC rectangle en B, d'après le théorème de Pythagore : $AC^2 = AB^2 + BC^2$ soit $AC^2 = 3^2 + 4^2$.

$AC^2 = 9 + 16 = 25$ soit $AC = \sqrt{25} = 5$.

Le rayon de la base de ce cylindre est $\boxed{5\text{ cm}}$.

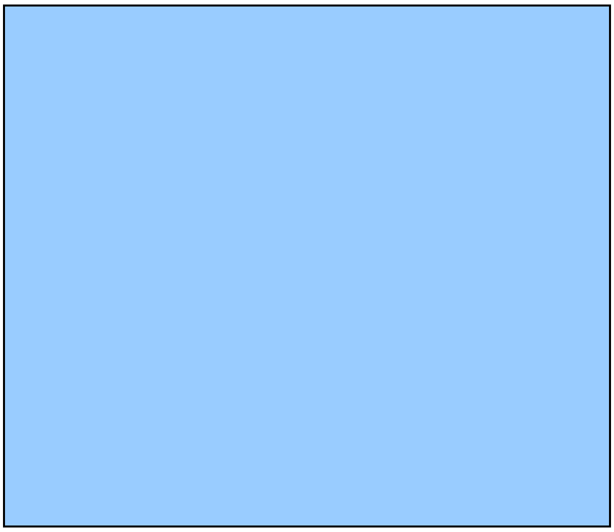
Exercice n°16 page 229 *Avec un cylindre de révolution*

On réalise une section d'un cylindre de révolution de 3,5 cm de rayon de base et 6 cm de hauteur par un plan perpendiculaire à la base et passant par les centres des deux bases.

a) Quelle est la nature de la section ?
b) Représente cette section en grandeur réelle.
c) Calcule l'aire de la section en cm^2.

a) La section est un $\boxed{\text{rectangle}}$ de largeur 6 cm et de longueur $2 \times 3{,}5 = 7$ cm.

b)



c) On a A = Longueur × largeur

$A = 6 \times 7 = \boxed{42}\ cm^2$.

2.3 Sections de pyramides et cônes

ex. 7

PROPRIÉTÉ 4

La section d'une pyramide ou d'un cône de révolution par **un plan parallèle à la base** est une **réduction de la base**.

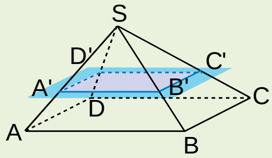
Exemples 4 :

On coupe une pyramide SABCD à base carrée de côté 3 cm et de hauteur 5 cm, par un plan parallèle à sa base à 4 cm du sommet.
Donne la nature et les dimensions de la section A′ B′ C′ D′.

Le coefficient de réduction est $k = \dfrac{4}{5}$, donc

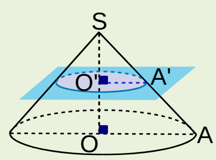
$A'B' = k \times AB = \dfrac{4}{5} \times 3 = 2{,}4$ cm.

La section est donc un carré de côté 2,4 cm.



On coupe un cône de révolution par un plan parallèle à sa base. Donne la nature de la section.

La section est une réduction de la base, c'est donc un cercle.



Exercice du cours n°7 page 227

Un verre à cocktail de forme conique de contenance 12,8 cL est rempli aux trois quarts de sa hauteur par un mélange de jus de fruits. Quel volume de jus de fruits contient-il ?

Le coefficient de réduction est $\dfrac{3}{4}$.

Le volume est donc multiplié par $\left(\dfrac{3}{4}\right)^3 = \dfrac{27}{64}$.

$12{,}8 \times \dfrac{27}{64} = 5{,}4$.

Le volume de jus de fruit est donc de $\boxed{5{,}4\text{ cL}}$.

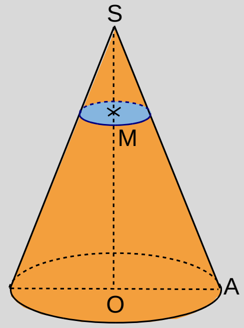
Exercice n°17 page 229 *Extrait du Brevet*

Le cône de révolution ci-contre de sommet S a une hauteur [SO] de 9 cm et un rayon de base [OA] de 5 cm.

a) Calculer le volume V_1 de ce cône au cm^3 près par défaut.

b) Soit M le point du segment [SO] tel que SM = 3 cm. On coupe le cône par un plan parallèle à la base passant par M. Calculer le rayon de cette section.

c) Calculer le volume V_2 du petit cône de sommet S ainsi obtenu au cm^3 près par défaut.



a) $V_1 = \frac{1}{3} \times \pi \times \text{rayon}^2 \times \text{hauteur}$

$V_1 = \frac{1}{3} \times \pi \times 5^2 \times 9$

$V_1 \approx \boxed{235\ \text{cm}^3}$ au cm^3 près par défaut.

b) On a le coefficient de réduction $\frac{SM}{SO} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

Donc $\text{Rayon}_{\text{Section}} = \frac{1}{3} \times \text{Rayon}_{\text{cône}}$

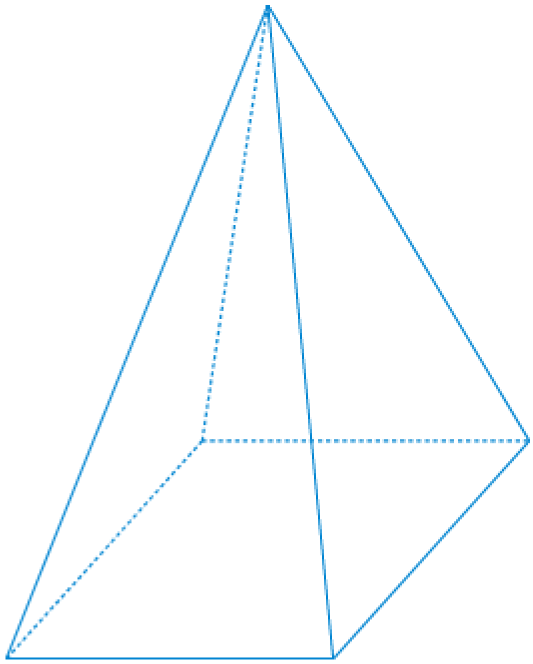
$\text{Rayon}_{\text{Section}} = \boxed{\frac{5}{3}\ \text{cm}}$.

c) On a $V_2 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times V_1 \approx \boxed{9}\ \text{cm}^3$.

Exercice n°18 page 230 *Avec une pyramide*

a) Dessine une représentation en perspective cavalière d'une pyramide régulière à base carrée de hauteur 9 cm et de côté de base 4,5 cm.

a)



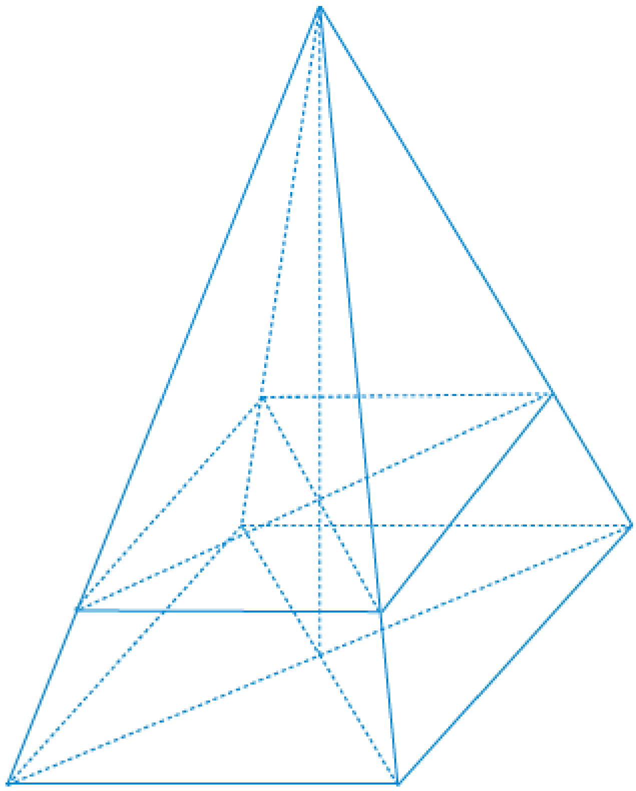
b) Calcule la valeur exacte de son volume.

b) $V = \frac{1}{3} \times 4{,}5^2 \times 9$

$V = \boxed{60{,}75\ \text{cm}^3}$.

c) Complète la représentation en traçant la section de la pyramide par un plan parallèle à la base coupant la hauteur aux deux-tiers en partant du sommet.

c)



d) Quelle est la nature de la section ? Justifie.

d) Le plan est parallèle à la base : il s'agit donc d'une réduction de la base. Ici, il s'agit d'un $\boxed{\text{carré}}$.

e) Calcule la valeur exacte du volume de la petite pyramide.

e) $V_{\text{petite pyramide}} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \times V$

$V_{\text{petite pyramide}} = \boxed{18\ \text{cm}^3}$.

3 Aires et volumes

3.1 Aire et volume de la boule

ex. 8 et 9

Formules

- Pour **calculer l'aire $\mathcal{A}$ d'une sphère**, on utilise la formule : $\mathcal{A} = 4 \times \pi \times rayon^2$.
- Pour **calculer le volume $\mathcal{V}$ d'une boule**, on utilise la formule : $\mathcal{V} = \frac{4}{3} \times \pi \times rayon^3$.

Exemple 5 :

Calcule l'aire d'une sphère et le volume d'une boule, toutes deux de rayon 5 cm.
Donne les valeurs exactes puis des valeurs approchées au dixième près.

Solution :

On calcule l'aire de la sphère :

$\mathcal{A} = 4 \times \pi \times \text{rayon}^2 = 4 \times \pi \times 5^2$

$\mathcal{A} = 100\ \pi\ \text{cm}^2$ **valeur exacte**

$\mathcal{A} \approx 314{,}2\ \text{cm}^2$ **valeur approchée**

On calcule le volume de la boule :

$\mathcal{V} = \frac{4}{3} \times \pi \times \text{rayon}^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 5^3$

$\mathcal{V} = \frac{500}{3}\ \pi\ \text{cm}^3$ **valeur exacte**

$\mathcal{V} \approx 523{,}6\ \text{cm}^3$ **valeur approchée**

Exercice du cours n°8 page 227

Calcule l'aire exacte d'une sphère de rayon $6{,}2$ cm puis arrondis le résultat au cm^2.

$A = 4 \times \pi \times R^2 = 4 \times \pi \times 6,2^2$

$A = \boxed{153,76\ \pi\ \text{cm}^2}$ valeur exacte

$A \approx \boxed{483\ \text{cm}^2}$ valeur arrondie au cm^2.

Exercice du cours n°9 page 227

Calcule le volume exact d'une boule de rayon 9 cm puis l'arrondi au mm^3.

$V = \dfrac{4}{3} \times \pi \times R^3 = \dfrac{4}{3} \times \pi \times 9^3$

$V = \boxed{972\ \pi\ \text{cm}^3}$ valeur exacte

$V \approx \boxed{3\ 053,628\ \text{cm}^3}$ soit $3\ 054\ 628\ \text{mm}^3$ valeur arrondie au mm^3.

Exercice n°5 page 228 *Un peu de calculs*

Dans chaque cas, donne la valeur exacte.

a) Volume d'une boule de 0,4 dm de rayon.
b) Aire d'une sphère de 24 cm de diamètre.
c) Volume d'un ballon rond de 240 mm de diamètre.

a) $V = \dfrac{4}{3} \times \pi \times \text{rayon}^3 = \dfrac{4}{3} \times \pi \times 0,4^3 = \dfrac{4}{3} \times \pi \times 0,064 = \dfrac{4 \times 0,064}{3} \times \pi = \boxed{\dfrac{0,256}{3}\ \pi\ \text{dm}^3}$.

b) $A = 4 \times \pi \times \text{rayon}^2 = 4 \times \pi \times 12^2 = \boxed{576\ \pi\ \text{cm}^2}$.

c) $V = \dfrac{4}{3} \times \pi \times \text{rayon}^3 = \dfrac{4}{3} \times \pi \times 120^3 = \boxed{2\ 304\ 000\ \pi\ \text{mm}^3}$.

Exercice n°6 page 228 *Notre étoile*

Le Soleil est assimilé à une boule de 1 392 000 km de diamètre.

a) Calcule la surface du Soleil. Donne la réponse en notation scientifique.
b) Calcule le volume du Soleil. Donne la réponse en notation scientifique.
c) Sachant que la Terre a un rayon de 6 378 km, calcule son volume, donne la réponse en notation scientifique.
d) De combien de fois le Soleil est-il plus volumineux que la Terre ?

a) Le rayon du soleil est $\dfrac{1\ 392\ 000}{2} = 696\ 000$ km.

La surface d'une sphère est donnée par la formule $A = 4 \times \pi \times \text{rayon}^2$

$A = 4 \times \pi \times 696\ 000^2$

$A \approx \boxed{6,09 \times 10^{12}\ \text{km}^2}$

b) Le volume d'une sphère est donnée par la formule $V = \dfrac{4}{3} \times \pi \times \text{rayon}^3$

$V = \dfrac{4}{3} \times \pi \times 696\ 000^3$

$V \approx \boxed{1,41 \times 10^{18}\ \text{km}^3}$.

c) Le volume d'une sphère est donnée par la formule $V = \dfrac{4}{3} \times \pi \times \text{rayon}^3$

$V = \dfrac{4}{3} \times \pi \times 6\ 378^3$

$V \approx 1,09 \times 10^{12}\ \text{km}^3$.

d) $\dfrac{\text{Volume du Soleil}}{\text{Volume de la Terre}} = \dfrac{1,41 \times 10^{18}}{1,09 \times 10^{12}} \approx 1,3 \times 10^6$.

Le Soleil est environ $\boxed{10^6}$ fois plus volumineux que la Terre.

Exercice n°7 page 228 *Mon beau sapin*

Un pâtissier décide de fabriquer des boules de Noël en chocolat (fourrées). Sachant que le diamètre d'une boule est 2,5 cm, de quelle quantité de chocolat (en litres) ce pâtissier a-t-il besoin pour préparer 500 boules ?

On cherche le volume d'une boule :

$V = \dfrac{4}{3} \times \pi \times \text{rayon}^3$

$V = \frac{4}{3} \times \pi \times \left(\frac{2,5}{2}\right)^3$

$V \approx 8,18 \text{ cm}^3$.

On multiplie par le nombre de boules : $8,18 \times 500 = 4\ 090 \text{ cm}^3$.

On sait que $1 \text{ L} = 1 \text{ dm}^3 = 1\ 000 \text{ cm}^3$.

Le pâtissier aura donc besoin d'environ $\boxed{4,09 \text{ L}}$ de chocolat.

Exercice n°8 page 228 *Comparaison*

Range dans l'ordre décroissant les volumes suivants :

- celui d'une boule de 3 dm de diamètre ;
- celui d'un cylindre de révolution de 3 dm de hauteur et de 3 dm de diamètre de base ;
- celui d'un cône de révolution de 3 dm de hauteur et 3 dm de diamètre de base.

On cherche le volume de ces trois solides :

Volume de la boule :

$V_{boule} = \frac{4}{3} \times \pi \times \text{rayon}^3$

$V_{boule} = \frac{4}{3} \times \pi \times \left(\frac{3}{2}\right)^3$

$V_{boule} = 4,5\ \pi \text{ dm}^3$

Volume du cylindre :

$V_{cylindre} = \text{Aire de la base} \times \text{hauteur}$

$V_{cylindre} = \pi \times \text{rayon}^2 \times \text{hauteur}$

$V_{cylindre} = \pi \times 3^2 \times 3$

$V_{cylindre} = 27\pi \text{ dm}^3$

Volume du cône :

$V_{cône} = \frac{1}{3} \times \text{Aire de la base} \times \text{hauteur}$

$V_{cône} = \frac{1}{3} \times \pi \times \text{rayon}^2 \times \text{hauteur}$

$V_{cône} = \frac{1}{3} \times \pi \times 3^2 \times 3$

$V_{cône} = 9\pi \text{ dm}^3$.

On a donc par ordre décroissant : $\boxed{\text{le cylindre, le cône, et la boule}}$.

Exercice n°9 page 228 *Volume*

Un silo à grain est formé d'un cylindre de révolution de rayon 4,5 m et de hauteur 10 m surmonté d'un cône de révolution de 2,5 m de hauteur et de même rayon.
Calcule le volume de ce silo, arrondi au m^3.

- On calcule le volume du cylindre.
  $V_{cylindre} = \text{Aire de la base} \times \text{hauteur}$
  $V_{cylindre} = \pi \times \text{rayon}^2 \times \text{hauteur}$
  $V_{cylindre} = \pi \times 4,5^2 \times 10$
  $V_{cylindre} = 202,5\ \pi \text{ m}^3$.

- On calcule le volume du cône :

$$V_{\text{cône}} = \frac{1}{3} \times \text{Aire de la base} \times \text{hauteur}$$

$$V_{\text{cône}} = \frac{1}{3} \times \pi \times \text{rayon}^2 \times \text{hauteur}$$

$$V_{\text{cône}} = \frac{1}{3} \times \pi \times 4{,}5^2 \times 2{,}5$$

$V_{\text{cône}} = 16{,}875\ \pi\ \text{m}^3$.

- On trouve ainsi le volume du silo :

$V_{\text{silo}} = V_{\text{cylindre}} + V_{\text{cône}}$
$V_{\text{silo}} = 202{,}5\ \pi + 16{,}875\ \pi$
$V_{\text{silo}} = 219{,}375\ \pi$

$V_{\text{silo}} \approx \boxed{689\ \text{m}^3}$ valeur arrondie au m^3.

Exercice n°12 page 229 *Maquette*

On désire réaliser une maquette à l'échelle $\frac{1}{1\,500}$ de la pyramide de Khéops. C'est une pyramide régulière à base carrée de 231 m de côté et de 147 m de hauteur.

a) Quelles sont les dimensions de la maquette ? (Donne les arrondis au centimètre.)

b) Calcule le volume de cette maquette.

a) On a $231 \times \frac{1}{1\,500} = 0{,}154$ m soit 15,4 cm.

On a $147 \times \frac{1}{1\,500} = 0{,}098$ m soit 9,8 cm.

La maquette est une pyramide à base carrée de $\boxed{15{,}4\ \text{cm}}$ de côté et $\boxed{9{,}8\ \text{cm}}$ de hauteur.

b) $V = \frac{1}{3} \times \text{Aire de la base} \times \text{hauteur}$

$V = \frac{1}{3} \times 15{,}42 \times 9{,}8$

$V \approx \boxed{774{,}7\ \text{cm}^3}$ (valeur arrondie au dixième).

3.2 Effets des agrandissements ou réductions

ex. 10

PROPRIÉTÉ 6

Lors d'un agrandissement ou d'une réduction de **rapport *k***,
- les longueurs sont **multipliées par *k***,
- les aires sont **multipliées par k^2**,
- les volumes sont **multipliés par k^3**.

Exemple 6 :

Un aquarium a pour dimensions : L 60 cm × *l* 30 cm × H 30 cm, la surface de ses vitres est 7 200 cm² et son volume est 54 000 cm³. Thomas a réalisé une maquette de cet aquarium au sixième. Quels en sont les dimensions, la surface des vitres et le volume ?

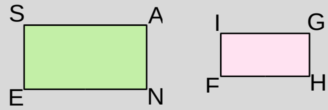
Solution :

Le coefficient de réduction est $k = \frac{1}{6}$.

- Les dimensions de la maquette sont : L 10 cm × *l* 5 cm × H 10 cm.
- La surface des vitres de la maquette est : $7\,200 \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 = 7\,200 \times \frac{1}{36} = 200\ \text{cm}^2$.
- Le volume de la maquette est : $54\,000 \times \left(\frac{1}{6}\right)^3 = 54\,000 \times \frac{1}{216} = 250\ \text{cm}^3$.

Exercice n°19 page 230 *Agrandissement ?*

Le rectangle ANES est-il un agrandissement du rectangle FIGH ? Justifie.



IG = 14 cm
GH = 9 cm
AS = 21 cm
SE = 12 cm

On a $\frac{AS}{IG} = \frac{21}{14} = \frac{3}{2}$ et $\frac{SE}{GH} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$.

Le rapport entre les longueurs et le rapport entre les largeurs n'est pas égal donc le rectangle ANES n'est $\boxed{\text{pas un agrandissement}}$ du rectangle FIGH.

Exercice n°20 page 230 *Réduire*

a) On divise par trois le rayon d'une boule. Par quel coefficient sera divisé son volume ?
b) On multiplie par 0,75 les dimensions d'un cube. Par combien sera multipliée sa surface latérale ?

a) Son volume sera divisé par $3^3 = \boxed{27}$.

b) La surface latérale sera multipliée par $0{,}75^2 = \boxed{0{,}562\ 5}$.

Exercice n°22 page 230 *Quel coefficient ?*

a) Sur une carte, la distance entre Paris et Bordeaux est 23,3 cm et dans la réalité, 582,5 km. Quelle est l'échelle de cette carte ?
b) La surface de la France est 675 417 km^2. Quelle est la superficie de la France sur cette carte ? Donne la valeur approchée au cm^2 près par défaut.

a) On doit, tout d'abord convertir les deux distances dans la même unité. On peut choisir les centimètres.

On a 582,5 km = 58 250 000 cm.

On a donc le rapport suivant entre les longueurs sur la carte et les longueurs sur le plan :

$$\frac{23{,}3}{58\ 250\ 000} = \boxed{\frac{1}{2\ 500\ 000}}.$$

b) $675\ 417\ km^2 = 6{,}75417 \times 10^{15}\ cm^2$

$$S_{carte} = \left(\frac{1}{2\ 500\ 000}\right)^2 S_{réelle}$$

$$S_{carte} = \left(\frac{1}{2\ 500\ 000}\right)^2 \times 6{,}75417 \times 10^{15}$$

$S_{carte} \approx \boxed{1\ 080\ cm^2}$, valeur approchée au cm^2 près par défaut.

Exercice n°23 page 230 *Un peu d'aire*

a) L'aire d'une sphère est 154 cm^2.
On multiplie son rayon par 2,5.
Calcule la nouvelle aire de la sphère.
b) La surface d'un champ est de 12 hectares.
On divise ses dimensions par 2,5.
Quelle sera sa nouvelle surface en m^2 ?

a) On a $154 \times 2{,}5^2 = \boxed{962{,}5\ cm^2}$.

b) On a $\frac{12}{2{,}5^2} = \boxed{1{,}92\ ha}$.