Ch.G2 : Triangle et parallèles

1 Les différentes formes du théorème des milieux

1.1 Montrer que des droites sont parallèles

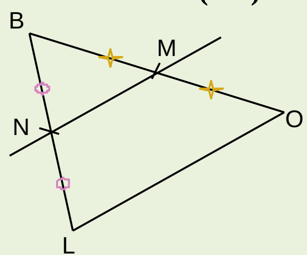
ex 1

Théorème 1

Si, dans un **triangle**, une droite passe par les **milieux** de deux côtés du triangle, alors elle est **parallèle** au troisième côté.

Exemple 11 :

On donne la figure codée ci-contre. Démontre que la droite (MN) est parallèle à la droite (OL).



Solution :

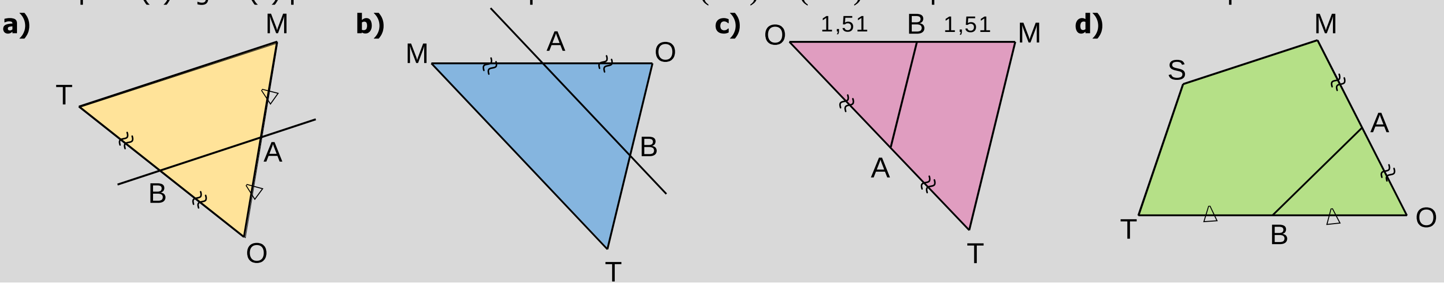
Les codages nous permettent d'affirmer que dans le triangle BOL, M est le milieu de [BO] et N est le milieu de [BL].

Propriété : Si, dans un triangle, une droite passe par les milieux de deux côtés du triangle, alors elle est parallèle au troisième côté.

Donc la droite (MN) est parallèle au troisième côté du triangle ; donc (MN) est parallèle à (OL).

Exercice n°1 page 163

Dans quelle(s) figure(s) peux-tu démontrer que les droites (AB) et (MT) sont parallèles ? Justifie tes réponses.

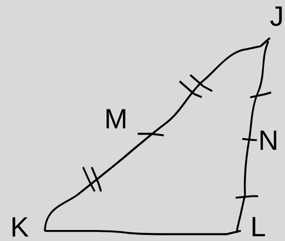


Dans la figure **b)**, le marquage n'indique pas si B est le milieu du côté [OT], on ne peut donc pas démontrer que les droites (AB) et (MT) sont parallèles.

Dans les figures **a, c, d**, le marquage indique les milieux de deux côtés du triangle, on peut donc démontrer que les droites (AB) et (MT) sont parallèles.

Exercice n°6 page 163

Observe le dessin de Paul. Dans le triangle KJL, il veut montrer que les droites (KL) et (MN) sont parallèles.
À l'aide du codage du dessin, rédige une démonstration.



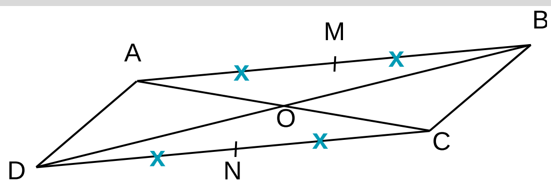
Dans le triangle KJL, M est le milieu de [KJ] et N est le milieu de [JL].

Propriété : si, dans un triangle, une droite passe par les milieux de deux côtés, alors elle est parallèle au troisième côté.

Donc la droite (MN) est parallèle à (KL).

Exercice n°1 page 162 *Démontre que deux droites sont parallèles.*

ABCD est un parallélogramme de centre O. On appelle M le milieu de [AB] et N le milieu de [DC].
Démontre que (OM) est parallèle à (BC).



ABCD est un parallélogramme de centre O.

Or, si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses diagonales se coupent en leur milieu.

Donc O est le milieu de [AC].

Dans le triangle ABC, O est le milieu de [AC] et M est le milieu de [AB].

Or si, dans un triangle, une droite passe par les milieux de deux côtés alors elle est parallèle au troisième côté.

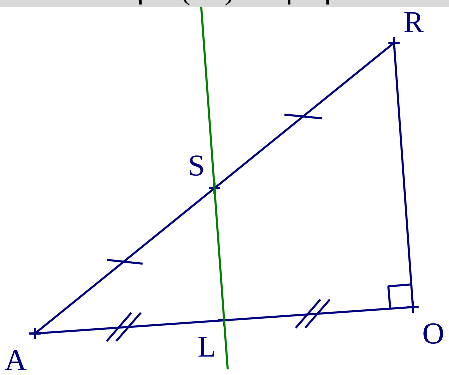
(MO) passe par les milieux de deux côtés du triangle ABC. On a donc : (OM) // (BC).

Exercice n°9 page 164

AOR est un triangle rectangle en O tel que AO = 5 cm et OR = 3,5 cm. Soit L le milieu de [AO] et S le milieu de [AR].

a) Fais un dessin en vraie grandeur et code-le.
b) Montre que (LS) est parallèle à (OR).
c) Déduis-en que (LS) est perpendiculaire à (AO).

a)



b) Dans le triangle AOR, L le milieu de [AO] et S le milieu de [AR].

Propriété : si, dans un triangle, une droite passe par les milieux de deux côtés, alors elle est parallèle au troisième côté.

Donc (LS) est parallèle à (OR).

c) (LS) est parallèle à (OR), et (OR) est perpendiculaire à (AO).

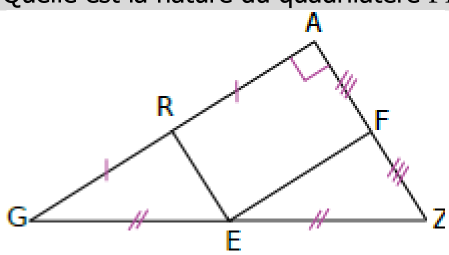
Propriété : si deux droites sont parallèles, alors toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.

Donc (LS) est perpendiculaire à (AO).

Exercice n°35 page 168 *Dans un triangle rectangle*

a) GAZ est un triangle rectangle en A. Les points F, E et R sont les milieux respectifs de [AZ], [GZ] et [GA]. Fais une figure.
b) Quelle est la nature du quadrilatère FERA ? Prouve-le.

a)



b) Dans le triangle AGZ on sait que R est le milieu de [AG] et E est le milieu de [GZ].

Or si, dans un triangle, une droite passe par les milieux de deux côtés du triangle alors elle est parallèle au troisième côté.

Donc les droites (RE) et (AZ) sont parallèles.

De la même façon, on démontre que (EF) et (AG) sont parallèles.

Le quadrilatère FERA a ses côtés opposés parallèles et un angle droit, il s'agit donc d'un $\boxed{\text{rectangle}}$.

1.2 Calculer une longueur connaissant des milieux

ex 2 et 3

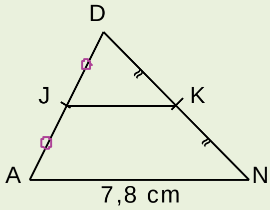
THÉORÈME 2

Si, dans un **triangle**, un segment joint les **milieux** de deux côtés, alors sa longueur est **égale à la moitié** de celle du troisième côté.

Exemple 2 :

On donne la figure codée ci-contre. Calcule la longueur JK.
Solution :

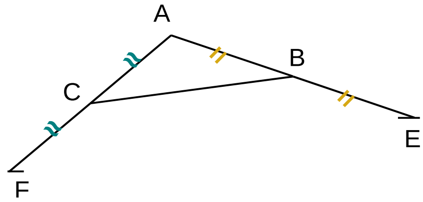
Les codages nous permettent d'affirmer que dans le triangle DAN, J et K sont les milieux respectifs de [DA] et [DN].
Propriété : *Si, dans un triangle, un segment joint les milieux de deux côtés, alors sa longueur est égale à la moitié de celle du troisième côté.*
Le segment [JK] a donc pour longueur la moitié de celle du troisième côté [AN].
Donc $JK = \frac{AN}{2} = \frac{7,8}{2} = 3,9$ cm.



Exercice n°2 page 162 *Démontre une égalité de longueur*

Soit ABC un triangle. E est le symétrique de A par rapport à B et F est le symétrique de A par rapport à C.
Démontre que $BC = \frac{EF}{2}$.

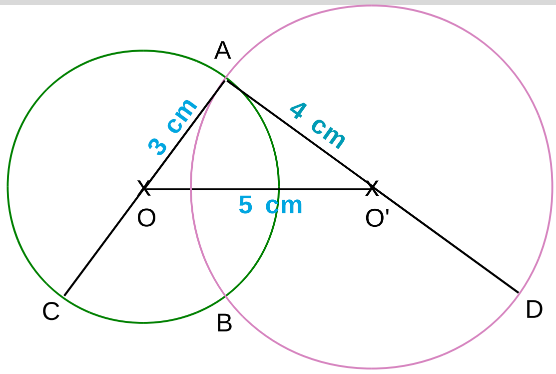
D'après la définition d'une symétrie centrale, dans le triangle AFE, C et B sont les milieux respectifs de [AF] et [AE].
[BC] joint les milieux de deux côtés du triangle AEF.
Or si, dans un triangle, un segment joint les milieux de deux côtés alors sa longueur est égale à la moitié de celle du troisième côté.
Donc : $BC = \frac{EF}{2}$.



Exercice n°3 page 162 *Calcule une longueur*

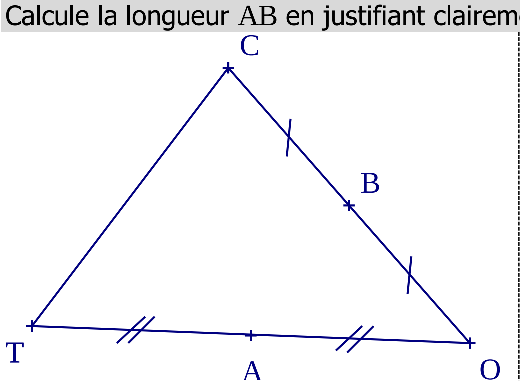
Deux cercles de rayons respectifs 3 cm et 4 cm et de centres respectifs O et O′ distants de 5 cm, se coupent en deux points A et B. On trace le diamètre [AC] de l'un et le diamètre [AD] de l'autre.
Calcule la longueur CD.

Dans le triangle ADC, O et O′ sont les milieux respectifs de [AC] et [AD]. D'après la construction, [OO′] joint les milieux de deux côtés de ADC.
Or si, dans un triangle, un segment joint les milieux de deux côtés alors sa longueur est égale à la moitié de celle du troisième côté.
Donc $OO' = \frac{CD}{2}$.
On en déduit que : $CD = 2 \times OO' = 10$ cm.



Exercice n°3 page 163

Construis le triangle TOC tel que TO = 5,8 cm ; TC = 4,3 cm et $\widehat{CTO} = 55°$.
Place les points A et B milieux respectifs des côtés [OT] et [OC].
Calcule la longueur AB en justifiant clairement la démarche utilisée.

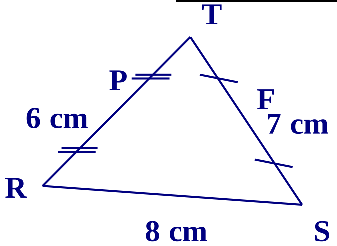


Dans le triangle TOC, A et B sont les milieux respectifs de [OT] et [OC], et TC = 4,3 cm.
Propriété : si, dans un triangle, un segment joint les milieux de deux côtés, alors sa longueur est égale à la moitié de celle du troisième côté.
Donc $AB = \frac{CT}{2} = \frac{4,3}{2} = \boxed{2,15 \text{ cm}}$.

Exercice n°7 page 163

RST est un triangle tel que RS = 8 cm, RT = 6 cm et TS = 7 cm. P est le milieu de [RT] et F est le milieu de [TS].
a) Fais un dessin à main levée et code-le.
b) Montre que (RS) et (PF) sont parallèles.
c) Calcule PF en justifiant la démarche utilisée.

a)



b) Dans le triangle RST, P est le milieu de [RT] et F est le milieu de [TS].

Propriété : si, dans un triangle, une droite passe par les milieux de deux côtés, alors elle est parallèle au troisième côté.

Donc la droite (PF) est parallèle à la droite (RS).

c) Dans le triangle RST, P est le milieu de [RT] et F est le milieu de [TS].

Propriété : si, dans un triangle, un segment joint les milieux de deux côtés, alors sa longueur est égale à la moitié de celle du troisième côté.

Donc $PF = \frac{RS}{2} = \frac{8}{2} = \boxed{4 \text{ cm}}$.

1.3 Montrer qu'un point est le milieu d'un segment

ex 4

THÉORÈME 3

Si, dans un **triangle**, une droite passe par le **milieu** d'un côté et est **parallèle** à un second côté alors elle passe par le **milieu** du troisième côté.

Exemple 3 :

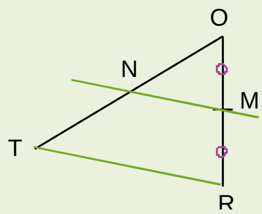
Soit TOR un triangle tel que M soit le milieu de [RO]. La parallèle à [TR] passant par M coupe [OT] en N. Démontre que N est le milieu de [OT].

Solution :

Dans le triangle TOR, on sait que M est le milieu du côté [RO] et que la droite (MN) est parallèle à la droite (TR).

Propriété : Si, dans un triangle, une droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle à un second côté alors elle passe par le milieu du troisième côté.

Donc la droite (MN) coupe le troisième côté [OT] du triangle en son milieu, donc N est le milieu de [OT].

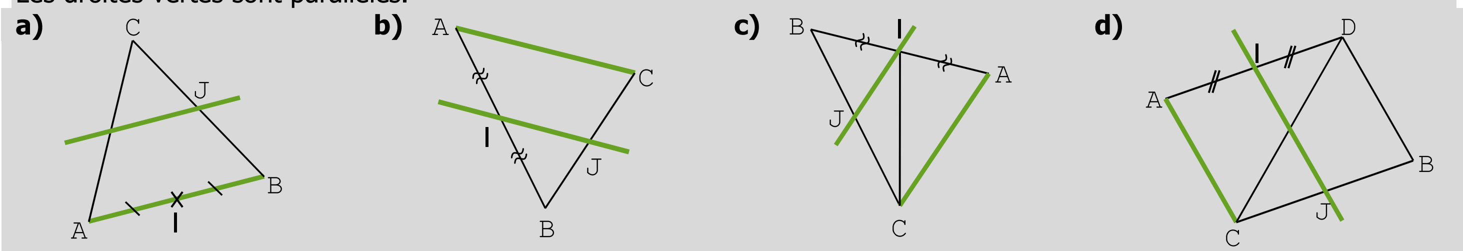


Les droites en vert sont parallèles entre elles

Exercice n°2 page 163

Dans quelle(s) figure(s) peux-tu démontrer que le point J est le milieu de [BC] ? Justifie tes réponses.

Les droites vertes sont parallèles.



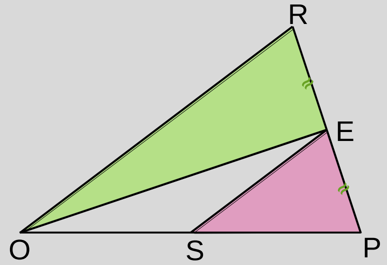
Dans la figure a, on ne sait pas si la parallèle au côté [AB] passe par le milieu d'un autre côté, on ne peut donc pas démontrer que le point J est le milieu de [BC].

Dans la figure d, dans le triangle BCD, on ne sait pas si la droite (IJ) est parallèle au côté [BD], on ne peut donc pas démontrer que le point J est le milieu de [BC].

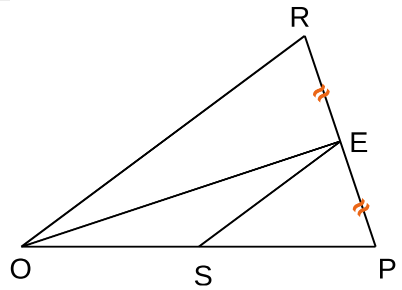
Dans les figures $\boxed{\text{b et c}}$, dans le triangle ABC, on sait que I est le milieu du côté [AB] et que la droite (IJ) est parallèle à la droite (AC). Donc la droite (IJ) coupe le troisième côté [BC] du triangle en son milieu, soit J est le milieu de [BC].

Exercice n°4 page 162 *Démontre qu'un point est le milieu d'un segment*

Sur la figure ci-contre, les droites (ES) et (RO) sont parallèles.
Démontre que S est le milieu de [OP].



Dans le triangle OPR, la droite (ES) passe par le milieu du côté [RP] et est parallèle au deuxième côté [OR].
Or si, dans un triangle, une droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle à un autre côté alors elle passe par le milieu du troisième côté.
Donc (ES) passe par le milieu du troisième côté [OP]. S est donc le milieu de [OP].

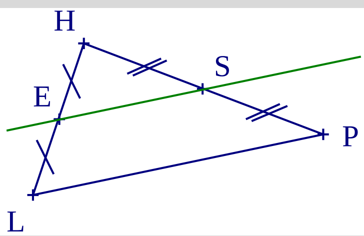


Exercice n°4 page 163

Dans chaque cas, en t'aidant d'un dessin à main levée, recopie et complète les démonstrations suivantes :

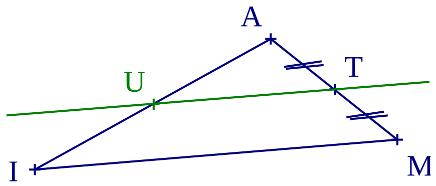
a) Dans le triangle HLP, on sait que E est le milieu de [HL] et S est le milieu de [HP].
Or si dans un triangle une droite passe par les milieux de deux côtés alors elle est parallèle au troisième côté.
Donc … .

a) Dans le triangle HLP, E est le milieu de [HL] et S est le milieu de [HP].
Propriété : si, dans un triangle, une droite passe par les milieux de deux côtés, alors elle est parallèle au troisième côté.
Donc (ES) est parallèle à (LP).



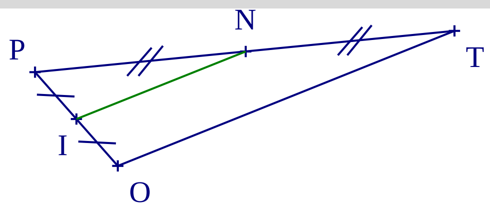
b) Dans le triangle AMI, on sait que T est le milieu de [AM] et … .
Or si dans un triangle, une droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle à un second côté alors elle coupe le troisième côté en son milieu.
Donc U est le milieu de [AI].

b) Dans le triangle AMI, on sait que T est le milieu de [AM] et la droite (UT) est parallèle au côté (IM).
Propriété : si, dans un triangle, une droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle à un second côté, alors elle coupe le troisième côté en son milieu.
Donc U est le milieu de [AI].



c) Dans le triangle POT, on sait que I est le milieu de [PO] et N est le milieu de [PT].
Or si … .
Donc IN = $\frac{OT}{2}$.

c) Dans le triangle POT, I est le milieu de [PO] et N est le milieu de [PT].
Propriété : si, dans un triangle, un segment joint les milieux de deux côtés, alors sa longueur est égale à la moitié de celle du troisième côté.
Donc IN = $\frac{OT}{2}$.

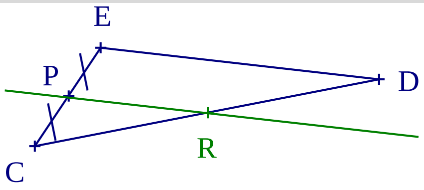


Exercice n°5 page 163

Anita doit montrer que le point R est le milieu du segment [CD]. Voici ce qu'elle a écrit :
« Dans le triangle ECD, on sait que P est le milieu de [CE], que R est un point de [CD] et que (PR) et (ED) sont

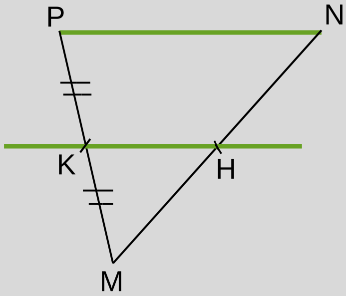
parallèles.
Or si dans un triangle une droite passe par les milieux de deux côtés alors elle est parallèle au troisième côté. Donc R est le milieu de [CD]. ».
Que penses-tu du raisonnement d'Anita ? Corrige-le si tu estimes que cela est nécessaire.

Anita s'est trompée de propriété. Il fallait appliquer :
si, dans un triangle, une droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle à un second côté, alors elle coupe le troisième côté en son milieu.



Exercice n°10 page 164

Les droites vertes sont parallèles. Démontre que H est le milieu de [MN].



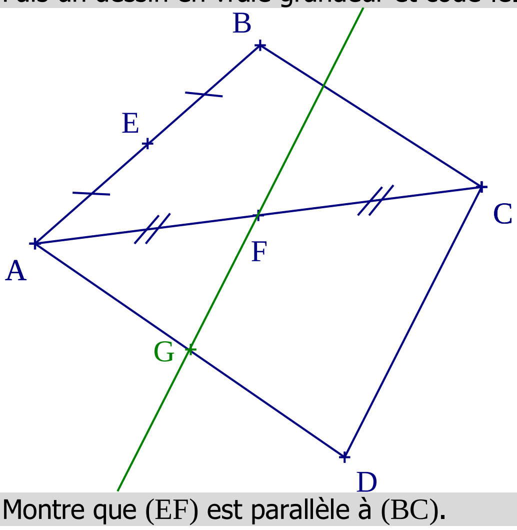
Dans le triangle MNP, K est le milieu de [MP] et (HK) est parallèle à (NP).
Propriété : si, dans un triangle, une droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle à un second côté, alors elle coupe le troisième côté en son milieu.
Donc H est le milieu de [MN].

Exercice n°11 page 164

ABC est un triangle tel que AC = 6 cm ; AB = 4 cm et BC = 3,5 cm. ACD est le triangle tel que AD = 5 cm ; CD = 4 cm, et, B et D ne sont pas du même côté de la droite (AC). E est le milieu de [AB] et F est le milieu de [AC]. La parallèle à (CD) passant par F coupe (AD) en G.

a) Fais un dessin en vraie grandeur et code-le.

a)



b) Montre que (EF) est parallèle à (BC).

b) Dans le triangle ABC, E est le milieu de [AB] et F est le milieu de [AC].
Propriété : si, dans un triangle, une droite passe par les milieux de deux côtés, alors elle est parallèle au troisième côté.
Donc (EF) est parallèle à (BC).

c) Montre que G est le milieu de [AD].

c) Dans le triangle ACD, F est le milieu de [AC] et (FG) est parallèle à (CD).
Propriété : si, dans un triangle, une droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle à un second côté, alors elle coupe le troisième côté en son milieu.
Donc G est le milieu de [AD].

d) Montre que (EG) et (BD) sont parallèles.

d) Dans le triangle ABD, E est le milieu de [AB] et G est le milieu de [AD].

Propriété : si, dans un triangle, une droite passe par les milieux de deux côtés, alors elle est parallèle au troisième côté.

Donc (EG) est parallèle à (BD).

e) Calcule les longueurs EF et FG. Justifie.

e) D'une part, dans le triangle ABC, E est le milieu de [AB] et F est le milieu de [AC].

D'autre part, dans le triangle ACD, F est le milieu de [AC] et G est le milieu de [AD].

Propriété : si, dans un triangle, un segment joint les milieux de deux côtés, alors sa longueur est égale à la moitié de celle du troisième côté.

Donc, d'une part, $EF = \frac{BC}{2} = \frac{3,5}{2} = \boxed{1,75 \text{ cm}}$, d'autre part $FG = \frac{CD}{2} = \frac{4}{2} = \boxed{2 \text{ cm}}$.

f) Calcule le périmètre de AEFG.

f) Comme E est le milieu de [AB], alors $AE = \frac{AB}{2} = \frac{4}{2} = 2$ cm.

Comme G est le milieu de [AD], alors $AG = \frac{AD}{2} = \frac{5}{2} = 2,5$ cm.

Le périmètre de AEFG est égal à : $AE + EF + FG + AG = 2 + 1,75 + 2 + 2,5 = \boxed{8,25 \text{ cm}}$.

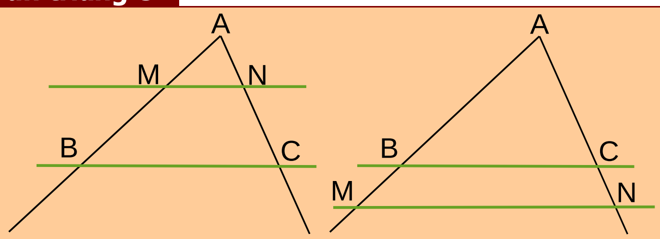
2 PROPORTIONNALITÉ DES LONGUEURS DANS LE TRIANGLE

2.1 Enoncé

Théorème 4 : Proportionnalité des longueurs dans un triangle

Si, dans un triangle ABC, M est un point de la demi-droite [AB), N un point de la demi-droite [AC) et les droites **(MN) et (BC) sont parallèles**

alors $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$.



Remarque 1 :

- On appelle parfois cette propriété la (petite) propriété de Thalès.
- Lorsque ce théorème s'applique, le tableau suivant est un tableau de proportionnalité.

Longueurs des côtés du triangle ABC	AB	AC	BC
Longueurs des côtés du triangle AMN	AM	AN	MN

2.2 Calcul d'une longueur avec des rapports égaux

ex 5

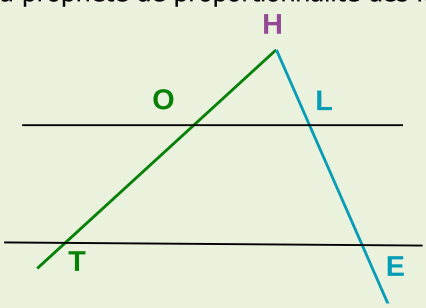
Exemple 4 :

Sur la figure suivante, les droites (OL) et (TE) sont parallèles. O et L appartiennent respectivement aux demi-droites [HT) et [HL). On donne HE = 5 cm, HL = 2 cm, TE = 7 cm et HO = 3 cm. Calcule les longueurs HT et OL.

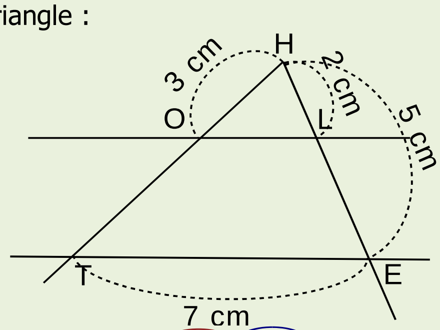
Solution :

Dans le triangle HTE : O ∈ [HT], L ∈ [HE] et (OL) // (TE).

D'après la propriété de proportionnalité des longueurs dans un triangle :



$$\frac{HO}{HT} = \frac{HL}{HE} = \frac{OL}{TE}$$

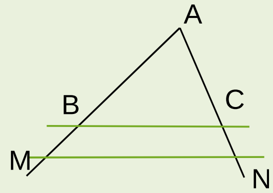


soit $\frac{3}{HT} = \frac{2}{5} = \frac{OL}{7}$.

- D'une part, $2 \times HT = 3 \times 5$ soit $HT = 3 \times \frac{5}{2} = 7,5$ cm.
- D'autre part, $5 \times OL = 2 \times 7$ soit $OL = 2 \times \frac{7}{5} = 2,8$ cm.

Exemple 5 :

Sur la figure suivante, les droites (BC) et (MN) sont parallèles. M et N appartiennent respectivement aux demi-droites [AB) et [AC). On donne AB = 2 cm, AC = 3 cm, BC = 4 cm et AM = 5 cm.
Calcule les longueurs AN et MN.



Solution :

Dans le triangle AMN : B ∈ [AM], C ∈ [AN] et (BC) // (MN).
D'après la propriété de proportionnalité des longueurs dans un triangle, le tableau suivant est un tableau de proportionnalité. On le remplit avec les valeurs connues (données dans l'énoncé) et on détermine les longueurs demandées en remarquant que AM = 2,5 × AB.
Donc on passe des longueurs des côtés du triangle ABC aux longueurs des côtés du triangle AMN en multipliant par 2,5.

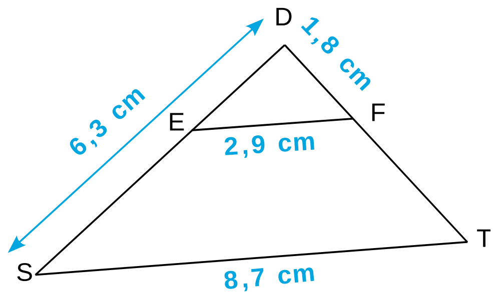
Longueurs des côtés du triangle ABC	AC = 3 cm	AB = 2 cm	BC = 4 cm
Longueurs des côtés du triangle AMN	**AN = 2,5 × 3 cm**	AM = 5 cm	**MN = 2,5 × 4 cm**

× 2,5

Ainsi, on obtient : **AN = 7,5 cm** et **MN = 10 cm**.

Exercice n°5 page 162 *Calcule des longueurs*

Dans le triangle DST, E est un point de [DS] et F un point de [DT] tel que DS = 6,3 cm ; EF = 2,9 cm ; ST = 8,7 cm et DF = 1,8 cm. De plus, (EF) et (ST) sont parallèles.
Calcule DE et DT.



On sait que dans le triangle DST :

E est un point de [DS], F un point de [DT] et les droites (EF) et (ST) sont parallèles.

D'après la propriété de proportionnalité des longueurs : $\frac{DE}{DS} = \frac{DF}{DT} = \frac{EF}{ST}$,

soit, en remplaçant par les longueurs connues : $\frac{DE}{6,3} = \frac{1,8}{DT} = \frac{2,9}{8,7}$.

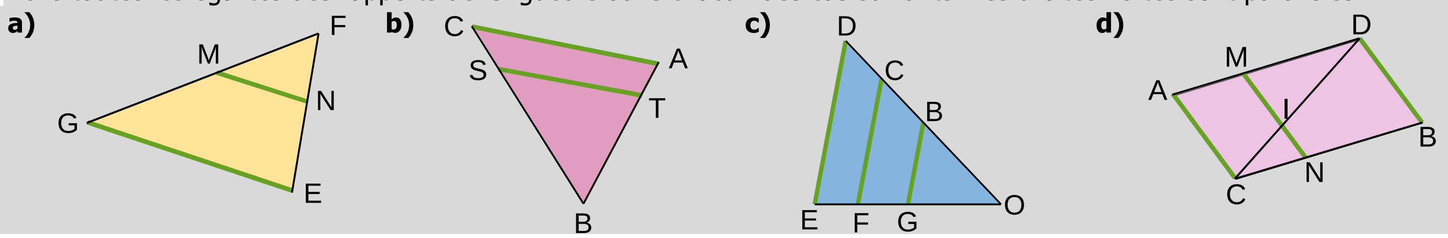
En utilisant l'égalité $\frac{1,8}{DT} = \frac{2,9}{8,7}$, on obtient $DT = \frac{1,8 \times 8,7}{2,9}$, soit

DT = 5,4 cm.

De même, l'égalité $\frac{DE}{6,3} = \frac{2,9}{8,7}$ aboutit à $DE = 6,3 \times \frac{2,9}{8,7}$, soit DE = 2,1 cm.

Exercice n°13 page 164

Écris toutes les égalités des rapports de longueurs dans chacun des cas suivants. Les droites vertes sont parallèles.



Dans chaque cas, on applique la propriété de proportionnalité des longueurs dans un triangle.

a) Dans le triangle EFG, M ∈ [FG], N ∈ [EF], et (MN) // (GE). Donc $\boxed{\frac{FM}{FG} = \frac{FN}{FE} = \frac{MN}{GE}}$.

b) Dans le triangle ABC, S ∈ [BC], T ∈ [AB], et (ST) // (AC). Donc $\boxed{\frac{BS}{BC} = \frac{BT}{BA} = \frac{ST}{AC}}$.

c) Dans le triangle ODE, B ∈ [OD], G ∈ [OE], et (BG) // (DE). Donc $\boxed{\frac{OB}{OD} = \frac{OG}{OE} = \frac{BG}{DE}}$.

Dans le triangle ODE, C ∈ [OD], F ∈ [OE], et (CF) // (DE). Donc $\boxed{\frac{OC}{OD} = \frac{OF}{OE} = \frac{CF}{DE}}$.

Dans le triangle OCF, B ∈ [OC], G ∈ [OF], et (BG) // (CF). Donc $\boxed{\frac{OB}{OC} = \frac{OG}{OF} = \frac{BG}{CF}}$.

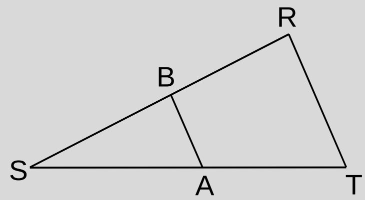
d) Dans le triangle ACD, M ∈ [AD], I ∈ [CD], et (MI) // (AC). Donc $\boxed{\frac{DM}{DA} = \frac{DI}{DC} = \frac{MI}{AC}}$.

Dans le triangle BCD, I ∈ [CD], N ∈ [BC], et (IN) // (BD). Donc $\boxed{\frac{CI}{CD} = \frac{CN}{CB} = \frac{IN}{BD}}$.

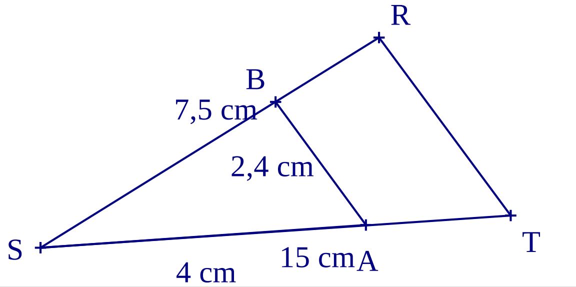
Exercice n°14 page 164

Sur la figure ci-contre, les droites (AB) et (TR) sont parallèles. On donne SA = 4 cm ; ST = 15 cm ; AB = 2,4 cm et SR = 7,5 cm.

a) Reporte les données sur un croquis.



a)



b) Pour calculer SB et RT, recopie et complète :
Dans le triangle … , on sait que A ∈ [ST], B ∈ […] et (AB) // (…) donc d'après la proportionnalité des longueurs dans un triangle :
$\frac{SA}{\ldots} = \frac{\ldots}{SR} = \frac{\ldots}{\ldots}$ soit $\frac{4}{\ldots} = \frac{\ldots}{7,5} = \frac{\ldots}{\ldots}$.

b) Dans le triangle $\boxed{RST}$, A ∈ [ST], B ∈ $\boxed{[RS]}$ et (AB) // $\boxed{(RT)}$, donc d'après la proportionnalité des longueurs dans un triangle : $\frac{SA}{\boxed{ST}} = \frac{\boxed{SB}}{SR} = \frac{\boxed{AB}}{\boxed{RT}}$ soit $\frac{4}{15} = \frac{\boxed{SB}}{7,5} = \frac{\boxed{2,4}}{RT}$.

Termine la démonstration pour calculer SB et RT.

D'une part, $\frac{4}{15} = \frac{SB}{7,5}$ soit $SB = \frac{4 \times 7,5}{15} = \boxed{2\text{ cm}}$.

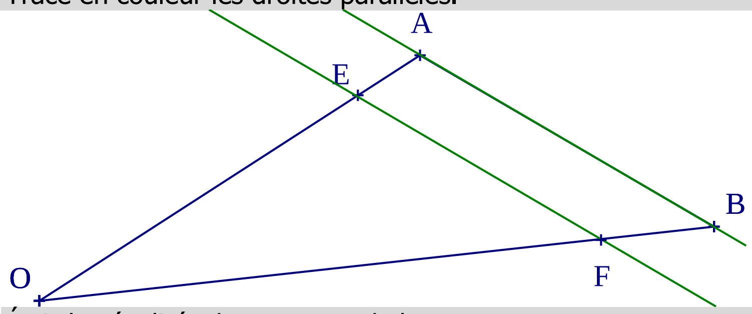
D'autre part, $\frac{4}{15} = \frac{2,4}{RT}$ soit $RT = \frac{15 \times 2,4}{4} = \boxed{9\text{ cm}}$.

Exercice n°15 page 165

Construis le triangle OAB tel que OA = 6 cm ; OB = 9 cm et AB = 4,5 cm. Place sur [OA] le point E tel que OE = 5 cm. La parallèle à la droite (AB) passant par E coupe (OB) en F.

a) Trace en couleur les droites parallèles.

a)



Écris les égalités des rapports de longueurs.

Dans le triangle OAB, E ∈ [OA], F ∈ [OB] et (EF) // (AB), donc d'après la proportionnalité des longueurs dans un triangle : $\boxed{\frac{OE}{OA} = \frac{OF}{OB} = \frac{EF}{AB}}$.

b) Calcule EF et OF.

b) Soit $\frac{5}{6} = \frac{OF}{9} = \frac{EF}{4,5}$.

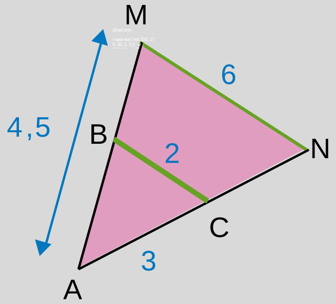
D'une part, $\frac{5}{6} = \frac{OF}{9}$ soit $OF = \frac{5 \times 9}{6} = \boxed{7,5\text{ cm}}$.

D'autre part, $\frac{5}{6} = \frac{EF}{4,5}$ soit $EF = \frac{5 \times 4,5}{6} = \boxed{3,75\text{ cm}}$.

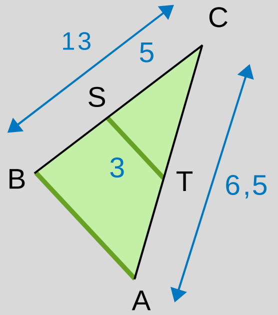
Exercice n°16 page 165

Dans chacun des cas suivants, les droites vertes sont parallèles.

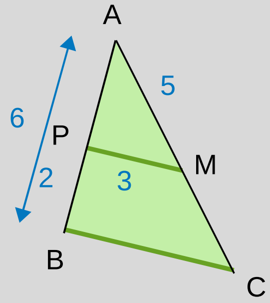
a) Calcule AN et AB.



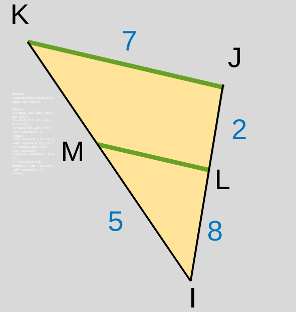
b) Calcule CT et AB.



c) Calcule AC et BC.



d) Calcule IK, MK et LM.



a) Dans le triangle AMN, B ∈ [AM], C ∈ [AN] et (BC) // (MN), donc d'après la proportionnalité des longueurs dans un triangle : $\dfrac{AB}{AM} = \dfrac{AC}{AN} = \dfrac{BC}{MN}$. Soit $\dfrac{AB}{4{,}5} = \dfrac{3}{AN} = \dfrac{2}{6}$.

D'une part, $\dfrac{3}{AN} = \dfrac{2}{6}$ soit $AN = \dfrac{3 \times 6}{2} = \boxed{9}$.

D'autre part, $\dfrac{AB}{4{,}5} = \dfrac{2}{6}$ soit $AB = \dfrac{4{,}5 \times 2}{6} = \boxed{1{,}5}$.

b) Dans le triangle ABC, S ∈ [BC], T ∈ [AC] et (ST) // (AB), donc d'après la proportionnalité des longueurs dans un triangle : $\dfrac{CS}{CB} = \dfrac{CT}{CA} = \dfrac{ST}{AB}$. Soit $\dfrac{5}{13} = \dfrac{CT}{6{,}5} = \dfrac{3}{AB}$.

D'une part, $\dfrac{5}{13} = \dfrac{CT}{6{,}5}$ soit $CT = \dfrac{5 \times 6{,}5}{13} = \boxed{2{,}5}$.

D'autre part, $\dfrac{5}{13} = \dfrac{3}{AB}$ soit $AB = \dfrac{13 \times 3}{5} = \boxed{7{,}8}$.

c) Comme AB = 6, BP = 2 et P ∈ [AB], alors AP = AB – BP = 6 – 2 = 4.

Dans le triangle ABC, P ∈ [AB], M ∈ [AC] et (MP) // (BC), donc d'après la proportionnalité des longueurs dans un triangle : $\dfrac{AP}{AB} = \dfrac{AM}{AC} = \dfrac{MP}{BC}$. Soit $\dfrac{4}{6} = \dfrac{5}{AC} = \dfrac{3}{BC}$.

D'une part, $\dfrac{4}{6} = \dfrac{5}{AC}$ soit $AC = \dfrac{5 \times 6}{4} = \boxed{7{,}5}$.

D'autre part, $\dfrac{4}{6} = \dfrac{3}{BC}$ soit $BC = \dfrac{6 \times 3}{4} = \boxed{4{,}5}$.

d) IJ = IL + LJ = 8 + 2 = 10.

Dans le triangle IJK, M ∈ [IK], L ∈ [IJ] et (ML) // (KJ), donc d'après la proportionnalité des longueurs dans un triangle : $\dfrac{IM}{IK} = \dfrac{IL}{IJ} = \dfrac{ML}{KJ}$. Soit $\dfrac{5}{IK} = \dfrac{8}{10} = \dfrac{ML}{7}$.

D'une part, $\dfrac{5}{IK} = \dfrac{8}{10}$ soit $IK = \dfrac{5 \times 10}{8} = \boxed{6{,}25}$.

D'où $MK = IK - IM = 6{,}25 - 5 = \boxed{1{,}25}$.

D'autre part, $\dfrac{8}{10} = \dfrac{ML}{7}$ soit $ML = \dfrac{8 \times 7}{10} = \boxed{5{,}6}$.

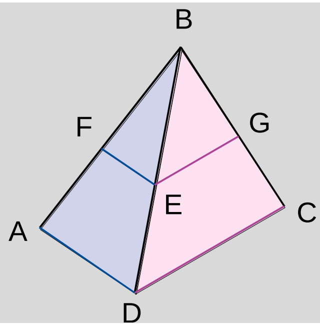
Exercice n°19 page 165

Sur la figure ci-contre : EF = 3 cm ; BG = 4 cm et GC = 2 cm.

Les droites (FE) et (AD) sont parallèles et les droites (EG) et (DC) sont parallèles.

a) Calcule $\dfrac{BE}{BD}$.

b) Déduis-en AD.



a) Dans le triangle BCD, E ∈ [BD], G ∈ [BC], et (EG) // (CD).

Donc, d'après la proportionnalité des longueurs dans un triangle : $\frac{BE}{BD} = \frac{BG}{BC} = \frac{EG}{CD}$.

D'où $\frac{BE}{BD} = \frac{4}{6} = \frac{EG}{CD}$ car BC = BG + GC = 4 + 2 = 6 cm.

Soit $\frac{BE}{BD} = \frac{4}{6} = \frac{2 \times 2}{2 \times 3} = \boxed{\frac{2}{3}}$.

b) Dans le triangle ABD, E ∈ [BD], F ∈ [AB], et (EF) // (AD).

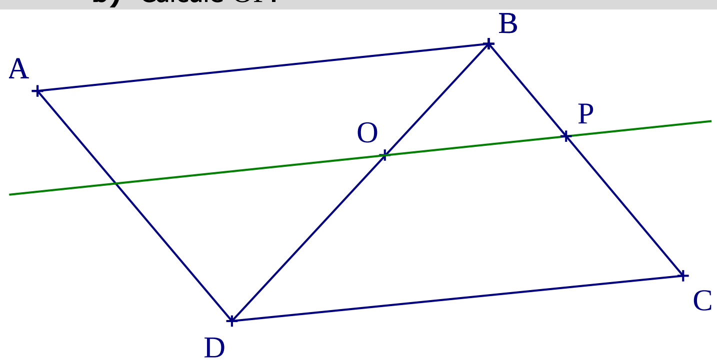
Donc, d'après la proportionnalité des longueurs dans un triangle : $\frac{BE}{BD} = \frac{BF}{BA} = \frac{EF}{AD}$.

D'où $\frac{2}{3} = \frac{BF}{BA} = \frac{3}{AD}$ soit $\frac{2}{3} = \frac{3}{AD}$ et $AD = \frac{3 \times 3}{2} = \boxed{4{,}5 \text{ cm}}$.

Exercice n°21 page 165

Construis un parallélogramme ABCD tel que AB = 6 cm ; AD = 4 cm et BD = 5 cm.
Place un point O sur [BD] tel que BO = 2 cm. Construis la parallèle à (AB) passant par O, elle coupe la droite (BC) en P.

a) Calcule BP. **b)** Calcule OP.



a) Dans le triangle BCD, O ∈ [BD], P ∈ [BC], et (OP) // (CD).

Donc, d'après la proportionnalité des longueurs dans un triangle :

$\frac{BO}{BD} = \frac{BP}{BC} = \frac{OP}{CD}$. D'où $\frac{2}{5} = \frac{BP}{4} = \frac{OP}{6}$.

D'une part, $\frac{2}{5} = \frac{BP}{4}$, soit $BP = \frac{2 \times 4}{5} = \boxed{1{,}6 \text{ cm}}$.

b) D'autre part, $\frac{2}{5} = \frac{OP}{6}$, soit $OP = \frac{2 \times 6}{5} = \boxed{2{,}4 \text{ cm}}$.

3 AGRANDISSEMENT, RÉDUCTION DANS LE PLAN

3.1 Définitions

ex 6

DÉFINITION 1

Quand deux figures F et F′ ont la **même forme** et que les **longueurs des côtés de F′ sont proportionnelles aux longueurs des côtés de F**, on dit que :

- F′ est un agrandissement de F si le coefficient de proportionnalité est supérieur à 1 ;
- F′ est une réduction de F si le coefficient de proportionnalité est inférieur à 1.

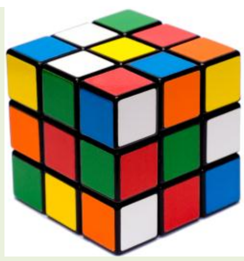
Ce coefficient est appelé **rapport d'agrandissement ou de réduction**.

Remarque 2 :

Si F est un agrandissement de F′ de rapport k (non nul), alors F′ est une réduction de F de rapport $\frac{1}{k}$.

Exemple 6 :

Ce casse-tête est un cube constitué de plusieurs petits cubes de différentes couleurs.
Chaque petit cube est-il une réduction du casse-tête ?
Si oui, précise le rapport de cette réduction.



Solution :

Chaque petit cube et le casse-tête ont la même forme : un cube. Comme chaque petit cube est plus petit que le casse-tête, alors chaque petit cube est bien une réduction du casse-tête.

Le côté du casse-tête contient trois petits cubes, donc le rapport de réduction est $\frac{1}{3}$.

Remarque 3 :

Le casse-tête est un agrandissement de chaque petit cube de rapport 3.

Exercice n°6 page 162 *Dimensions d'un triangle*

Le triangle BEC est une réduction de rapport 0,75 du triangle TOP de côtés 3,6 cm ; 5,2 cm et 7,2 cm.
Donne les longueurs du triangle BEC puis construis-le.

Le triangle BEC étant une réduction de rapport 0,75 du triangle TOP, il suffit de multiplier la dimension des côtés de TOP par 0,75 pour obtenir celles de BEC. On obtient donc que BEC a pour dimensions :

$3{,}6 \times 0{,}75 = 2{,}7$ cm ;

$5{,}2 \times 0{,}75 = 3{,}9$ cm ;

$7{,}2 \times 0{,}75 = 5{,}4$ cm.

3.2 Propriétés

ex 7 et 8

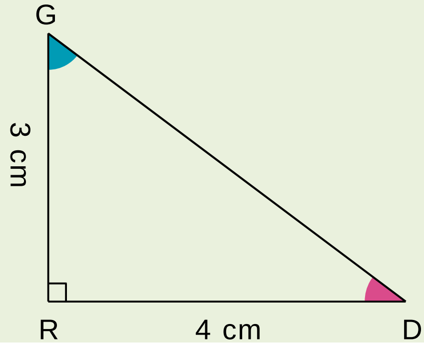
PROPRIÉTÉ 1

Dans un agrandissement ou une réduction les **mesures des angles**, la **perpendicularité** et le **parallélisme** sont conservés.

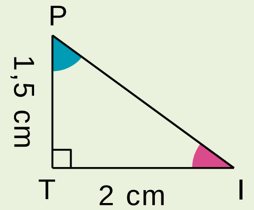
Exemple 7 : Calcul des longueurs dans une réduction

Le triangle GRD est rectangle en R tel que GR = 3 cm et RD = 4 cm. Le triangle PTI est une réduction de rapport 0,5 du triangle GRD, tel que l'angle $\widehat{PTI}$ soit la réduction de l'angle $\widehat{GRD}$. Quelle est la nature du triangle PTI ? Calcule TP et TI.

Solution :

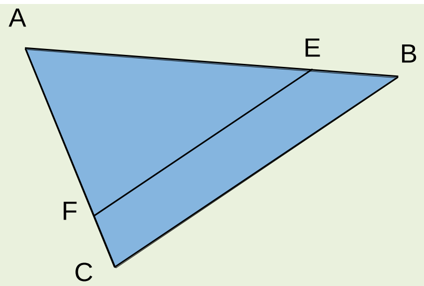


Comme PTI est une réduction de GRD de rapport 0,5, alors les mesures des angles sont conservées donc $\widehat{PTI} = \widehat{GRD} = 90°$.
Le triangle PTI est donc rectangle en T.
De plus, ses dimensions sont 0,5 fois celles du triangle GRD.
On en déduit alors que :
$TP = 0{,}5 \times RG = 0{,}5 \times 3 = 1{,}5$ cm et
$TI = 0{,}5 \times RD = 0{,}5 \times 4 = 2$ cm.



Exemple 8 : Déterminer si une figure est un agrandissement ou une réduction

Dans la figure ci-contre, on donne les mesures suivantes :
AB = 6 cm, AC = 4 cm, BC = 5 cm, AF = 2,8 cm, AE = 4,2 cm et EF = 3,5 cm.
Le triangle AEF est-il une réduction du triangle ABC ?



Solution :
Les figures AEF et ABC ont la même forme, on calcule donc les rapports :
$\frac{AE}{AB} = \frac{4{,}2}{6} = 0{,}7$; $\frac{AF}{AC} = \frac{2{,}8}{4} = 0{,}7$; $\frac{EF}{BC} = \frac{3{,}5}{5} = 0{,}7$.
Les trois rapports sont égaux, donc le triangle AEF est une réduction du triangle ABC.

Remarque 4 :

Les côtés du triangle AEF étant proportionnels aux côtés du triangle ABC, on peut les mettre dans un tableau de proportionnalité. On retrouve ainsi la proportionnalité des longueurs dans le triangle de la partie 2.

Exercice n°7 page 162 *Dimensions d'un agrandissement*

Donne les dimensions d'un agrandissement de rapport 2,5 du triangle PAS tel que :
$\widehat{APS} = 100°$, $\widehat{SAP} = 50°$ et PA = 3 cm.

Dans un agrandissement, les mesures des angles sont conservées.

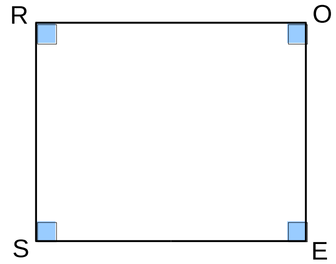
Les agrandissements des angles $\widehat{APS}$ et $\widehat{SAP}$ auront la même mesure que $\widehat{APS}$ et $\widehat{SAP}$, soit 100° et 50° respectivement.

Dans un agrandissement de rapport 2,5, il suffit de multiplier les longueurs par 2,5. L'agrandissement de PA aura pour mesure $3 \times 2{,}5 = 7{,}5$ cm.

Exercice n°8 page 162 *Nature d'une réduction*

Soit un rectangle BLEU de longueur 5 cm et de largeur 4 cm. Soit ROSE une réduction de BLEU de rapport $\frac{3}{5}$.

Quelle est la nature du quadrilatère ROSE ? Justifie ta réponse puis construis ROSE.



Une réduction conserve la mesure des angles.

ROSE est une réduction du rectangle BLEU. Donc ROSE aura quatre angles droits.

ROSE sera donc aussi un rectangle.

Dans un agrandissement de rapport $\frac{3}{5}$, il suffit de multiplier les longueurs par $\frac{3}{5}$. Donc les dimensions du rectangle ROSE sont :

RO = 5 × = 3 cm ;

OS = 4 × = 2,4 cm.

Exercice n°25 page 166 *Reconnaître une situation de réduction ou d'agrandissement*

Parmi les images ci-contre, quelles sont celles qui sont des réductions, des agrandissements de l'arbre ci-contre et celles qui ne sont ni l'une ni l'autre ?

Fig. 1 *Fig. 2* *Fig. 3* *Fig. 4* *Fig. 5*

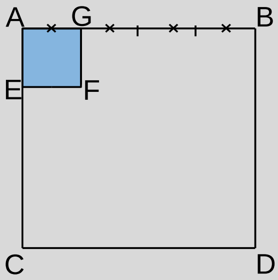
La réduction est la figure 1. Un agrandissement est la figure 4.

Les figures 2, 3 et 5 sont ni l'une ni l'autre.

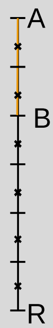
Exercice n°26 page 166 *Agrandissement ou réduction de figures*

Rédige dans chaque cas, deux phrases : une avec les mots « … est un agrandissement de rapport … de … .» et l'autre avec « … est une réduction de rapport … de … .».

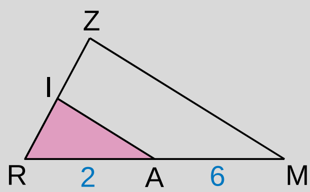
a) AGFE et ABDC sont des carrés.



b)



c) Les droites (AI) et (MZ) sont parallèles.



a) ABDC est un agrandissement de rapport 4 de AGFE.

AGFE est une réduction de rapport $\frac{1}{4}$ de ABDC.

b) [BR] est un agrandissement de rapport 2 de [AB].

[AB] est une réduction de rapport $\frac{1}{2}$ de [BR].

2e solution :

[AR] est un agrandissement de rapport 3 de [AB].

[AB] est une réduction de rapport $\frac{1}{3}$ de [AR].

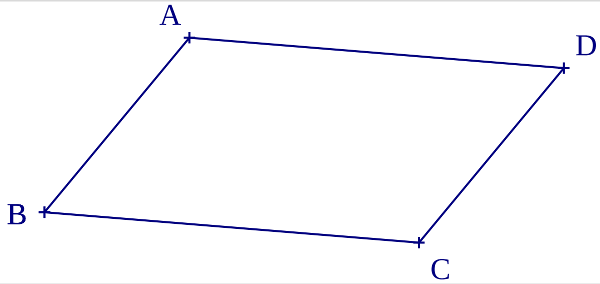
c) $\boxed{\text{MRZ}}$ est un agrandissement de rapport $\boxed{4}$ de $\boxed{\text{ARI}}$.

$\boxed{\text{ARI}}$ est une réduction de rapport $\boxed{\frac{1}{4}}$ de $\boxed{\text{MRZ}}$.

Exercice n°28 page 167 *Agrandissement ou non*

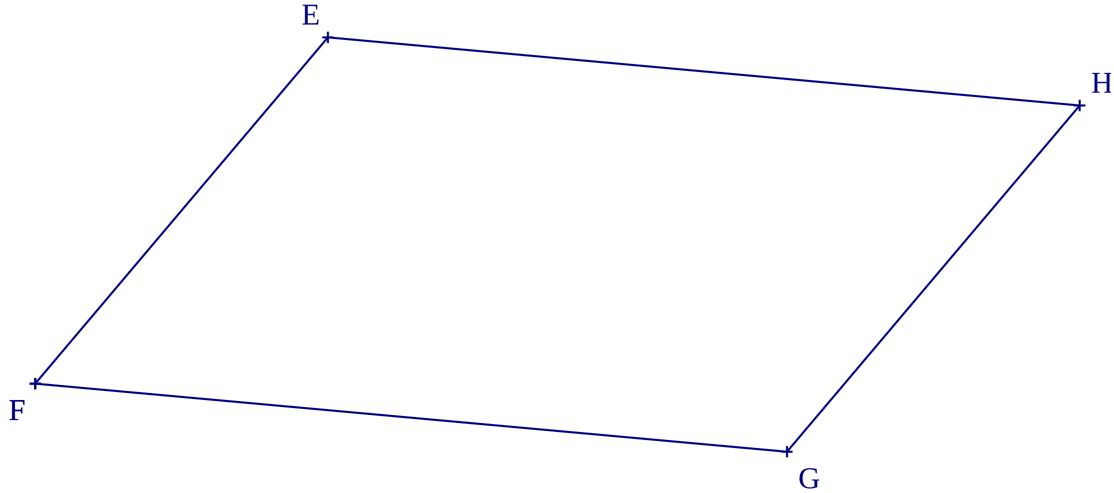
a) Construis un parallélogramme ABCD tel que AB = 3 cm ; BC = 5 cm et $\widehat{ABC} = 55°$.

a)



b) Construis un parallélogramme EFGH tel que EF = 2 AB ; FG = 2 BC et qui soit un agrandissement du parallélogramme ABCD de rapport 2. Écris la propriété utilisée.

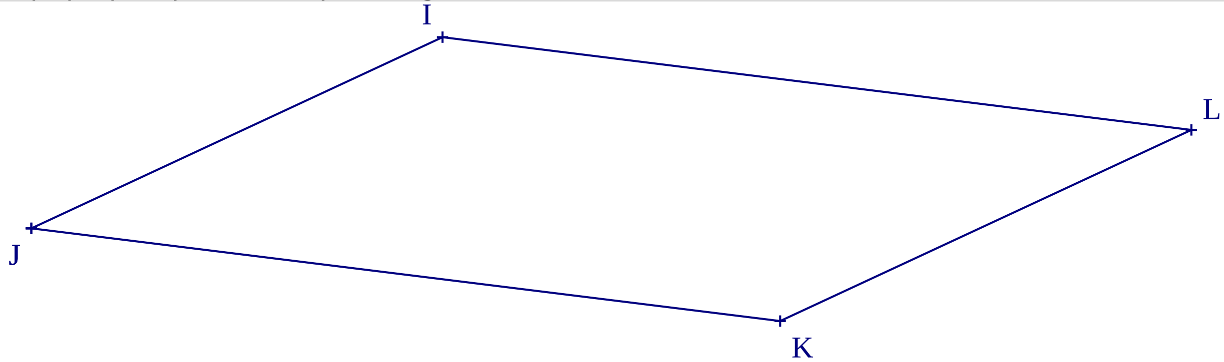
b)



Dans un agrandissement, les mesures des angles sont conservées : $\widehat{EFG} = 55°$.

c) Construis un parallélogramme IJKL tel que IJ = 2 AB ; JK = 2 BC et qui ne soit pas un agrandissement de ABCD. Explique pourquoi ce n'est pas un agrandissement.

c)



Ce n'est pas un agrandissement, car les mesures des angles ne sont pas conservées : $\widehat{IJK} \neq 55°$.

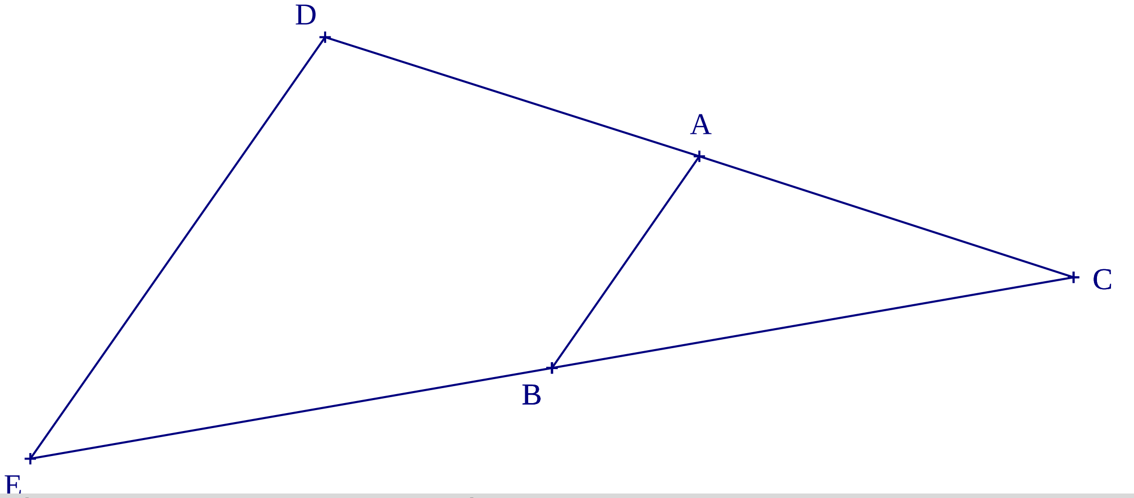
Exercice n°30 page 167 *Agrandissement et parallélisme*

a) Construis un triangle ABC tel que AB = 3,4 cm ; AC = 4,5 cm et BC = 7 cm.

b) Construis un triangle CDE qui soit un agrandissement de rapport 2 du triangle ABC et tel que D appartient à la demi-droite [CA) et E appartienne à la demi-droite [CB).

a)

b)



c) Démontre que (DE) et (AB) sont parallèles.

c) Dans le triangle ADE, A et B sont les milieux des côtés [AC] et [CE].

<u>Propriété :</u> *dans un triangle, si une droite passe par les milieux de deux côtés, alors elle est parallèle au troisième côté.*

Donc (AB) est parallèle à (DE).

<u>Autre solution :</u>

L'angle $\widehat{EDC}$ est un agrandissement de l'angle $\widehat{BAC}$.

<u>Propriété :</u> *dans un agrandissement, les mesures des angles sont conservées.*

Donc $\widehat{EDC} = \widehat{BAC}$.

De plus ces angles sont correspondants, déterminés par les droites (DE) et (AB), ces droites sont donc parallèles.