Ch.G3 : Distances et tangentes

1 Distance d'un point à une droite

1.1 Définition

ex 1

Définition 1 :

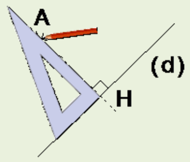
Soit une droite (d) et un point A n'appartenant pas à (d).
La **distance du point A à la droite (d)** est égale à AH où H désigne le pied de la perpendiculaire à (d) passant par A.

Remarque 1 :

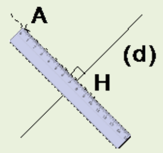
La longueur AH est alors la plus courte distance entre le point A et tous les points de la droite (d).

Exemple 1 :

Soit (d) une droite et A un point n'appartenant pas à (d). Mesure la distance du point A à la droite (d).



On trace la droite perpendiculaire à (d) qui passe par le point A.

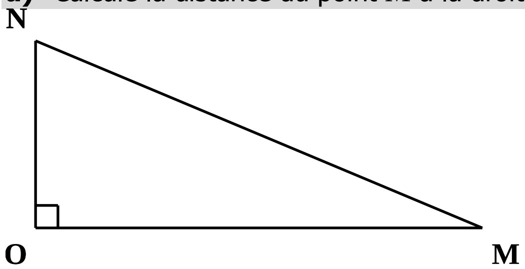


On mesure la longueur AH où H est le pied de la perpendiculaire à (d).

Exercice n°1 page 178

Construis un triangle OMN, rectangle en O, tel que MN = 6,5 cm et ON = 2,5 cm.

a) Calcule la distance du point M à la droite (ON).



a) La distance du point M à la droite (ON) est la distance MO.

Dans le triangle MON rectangle en O, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$MN^2 = MO^2 + ON^2$

$6{,}5^2 = MO^2 + 2{,}5^2$

$MO^2 = 6{,}5^2 - 2{,}5^2$

$MO^2 = 36$

$MO = \sqrt{36} = 6$

La distance du point M à la droite (ON) est $\boxed{6 \text{ cm}}$.

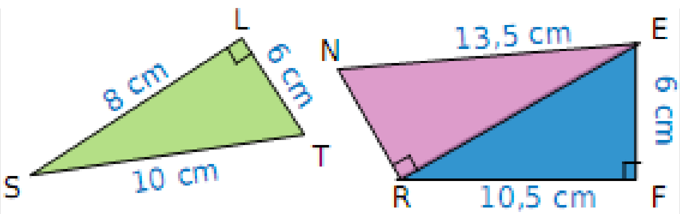
b) Peux-tu trouver un point P sur la droite (ON) tel que MP = 5,8 cm ? Pourquoi ?

b) La longueur OM est la plus courte distance entre le point M et n'importe quel autre point de la droite (ON), donc on ne peut pas trouver de point P sur la droite (ON) tel que MP = 5,8 cm.

Exercice n°1 page 179

Observe, recopie et complète :

a) La distance du point S à la droite (LT) est … .
b) La distance du point T à la droite … est 6 cm.
c) Le point … est situé à 10,5 cm de la droite … .
d) Le point … est situé à … de la droite (RF).
e) La distance du point E à la droite (NR) est comprise entre … et … .



a) La distance du point S à la droite (LT) est $\boxed{8 \text{ cm}}$.

b) La distance du point T à la droite $\boxed{(LS)}$ est 6 cm.

c) Le point $\boxed{R}$ est situé à 10,5 cm de la droite $\boxed{(EF)}$.

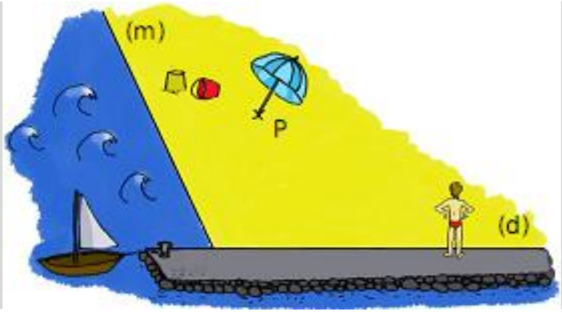
d) Le point $\boxed{E}$ est situé à $\boxed{6 \text{ cm}}$ de la droite (RF).

e) La distance du point E à la droite (NR) est comprise entre $\boxed{10{,}5 \text{ cm}}$ et $\boxed{13{,}5 \text{ cm}}$.

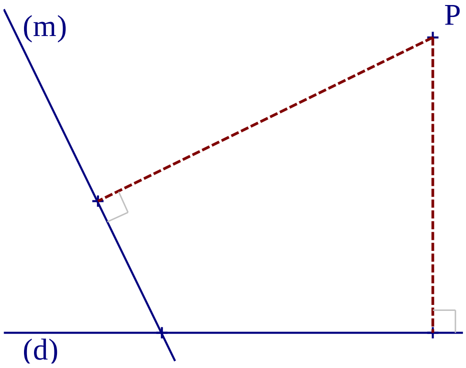
Exercice n°2 page 179 *Aïe, aïe, aïe…*

a) Sur ton cahier, trace deux droites (m) et (d) ainsi qu'un point P, comme sur le dessin.

b) Jean, debout sur la digue, veut aller se baigner mais il doit d'abord passer par le parasol (au point P) pour prévenir ses parents. Représente sur ton schéma le trajet que Jean doit emprunter afin de marcher le moins longtemps sur le sable rendu brûlant par les rayons du Soleil.

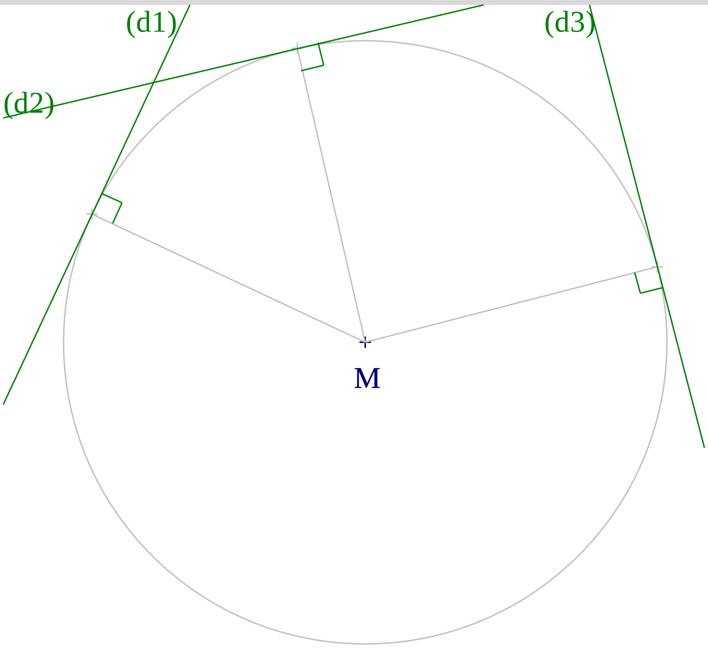


a)
b)



Exercice n°4 page 179

Un point M étant donné, construis trois droites (d_1), (d_2) et (d_3) telles que M soit situé à 4 cm de chacune d'entre elles.



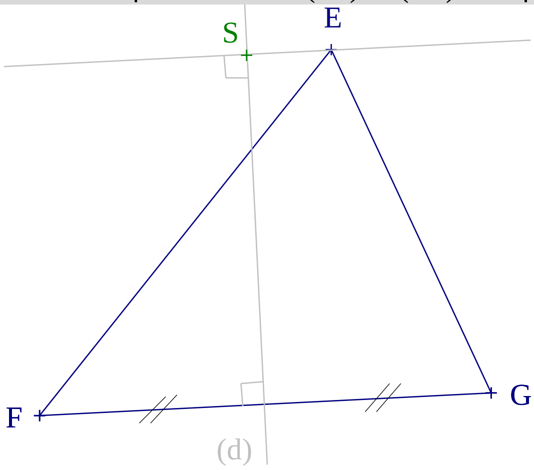
Exercice n°6 page 179

Construis le triangle EFG tel que EG = 5 cm, FG = 6 cm et $\widehat{EGF} = 68°$.

a) Construis le point S équidistant de F et G, le plus proche possible du point E.

b) Démontre que les droites (ES) et (FG) sont parallèles.

a)



b) Comme S est équidistant de F et G, alors S appartient à la médiatrice (d) de [FG].

De plus S est le plus proche possible de E, alors (ES) est perpendiculaire à cette médiatrice.

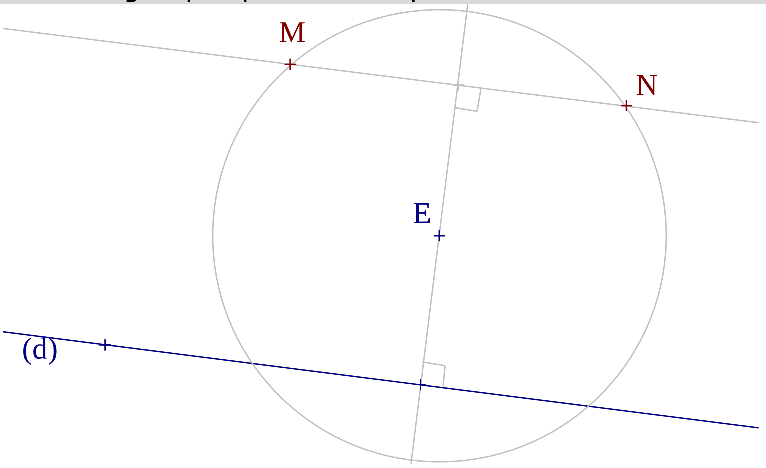
On a donc les droites (ES) et (FG) perpendiculaires à la même droite (d).

Propriété : si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième droite, alors elles sont parallèles entre elles.

Donc les droites (ES) et (FG) sont parallèles.

Exercice n°7 page 179

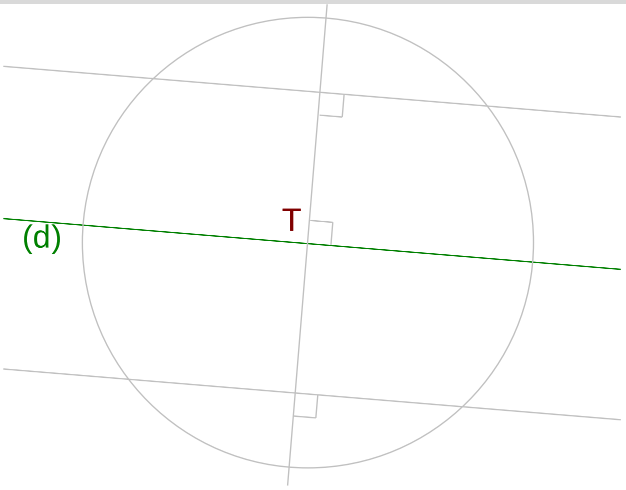
Soient une droite (d) et un point E situé à 2 cm de (d).
Fais une figure puis place tous les points situés à la fois à 4 cm de (d) et à 3 cm du point E.



Les points recherchés sont notés M et N sur la figure.

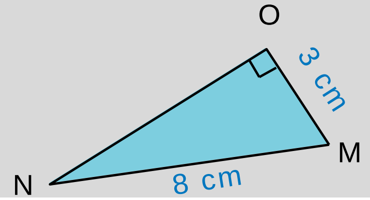
Exercice n°8 page 179

Soient une droite (d) et un point T appartenant à la droite (d).
Fais une figure puis colorie en bleu la région du plan contenant les points situés à la fois à plus de 2 cm de (d) et à moins de 3 cm de T.



Exercice n°30 page 182

On considère le triangle rectangle NOM représenté ci-contre.
Calcule l'arrondi au millimètre de la distance du point N à la droite (OM).



Le triangle NOM est rectangle en O, son hypoténuse est le côté [MN].

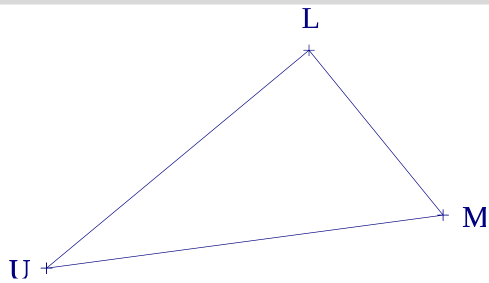
Donc, d'après le théorème de Pythagore, on a : $MN^2 = ON^2 + OM^2$.

$8^2 = ON^2 + 3^2$
$64 = ON^2 + 9$
$ON^2 = 64 - 9$
$ON^2 = 55\ \text{cm}^2$.

D'où $ON = \sqrt{55} \approx 7{,}4$ cm qui est la distance du point N à la droite (OM).

Exercice n°34 page 182

ULM est un triangle tel que LM = 28, UL = 45 et UM = 53.
Quelle est la distance du point U à la droite (LM) ? Justifie.



Si le triangle ULM est rectangle, seul le côté [UM] peut être l'hypoténuse car c'est le plus long.

D'une part, $UM^2 = 53^2 = 2\,809$.

D'autre part, $LU^2 + LM^2 = 45^2 + 28^2 = 2\,025 + 784 = 2\,809$.

On constate que $UM^2 = LU^2 + LM^2$.

Donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ULM est rectangle en L.

On en déduit que la distance du point U à la droite (LM) est : UL = $\boxed{45}$.

2 Tangente à un cercle en un point

EX 4 À 6

Définition 2 :

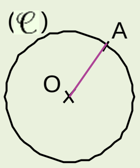
La **tangente** à un cercle ($\mathscr{C}$) de centre O en un point A de ($\mathscr{C}$) est la droite passant par A et perpendiculaire au rayon [OA].

Remarque 2 :

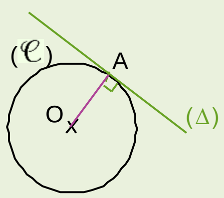
La distance entre le centre d'un cercle et toute tangente à ce cercle est égale au rayon.

Exemples 3 :

Soit ($\mathscr{C}$) un cercle de centre O et A un point de ce cercle. Trace la droite (Δ) tangente au cercle ($\mathscr{C}$) en A.



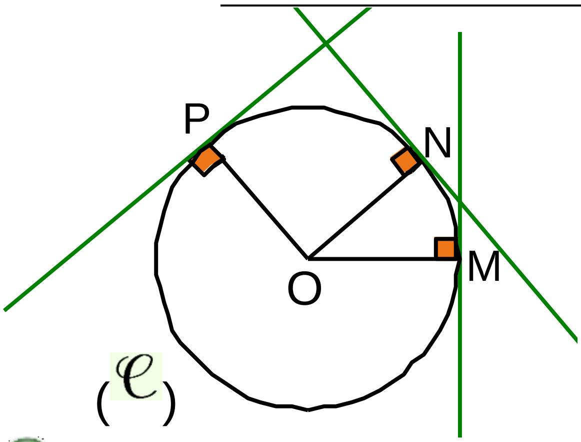
On trace le rayon [OA].



On trace la droite (Δ) perpendiculaire en A à la droite (OA).
La droite (Δ) est la tangente en A au cercle ($\mathscr{C}$).

Exercice n°4 page 178

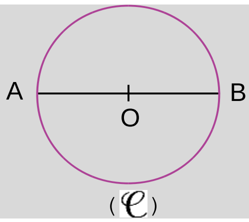
Trace un cercle ($\mathscr{C}$) de centre O et de rayon 2 cm. Place trois points M, N et P sur le cercle puis construis les tangentes à ($\mathscr{C}$) en M, N et P.

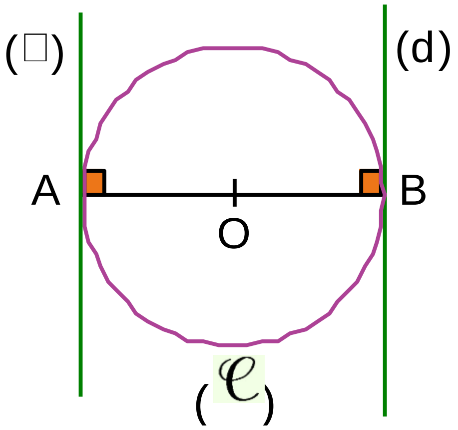


Pour tracer la tangente à (𝒞) passant par M, on trace d'abord le rayon [OM] puis la perpendiculaire à (OM) passant par M.

Exercice n°5 page 178

Soit (𝒞) un cercle de diamètre [AB]. Trace (Δ) et (d) les tangentes au cercle (𝒞) respectivement en A et B. Démontre que les droites (Δ) et (d) sont parallèles.





(Δ) est la tangente en A au cercle (𝒞).

Or la tangente à un cercle de centre O en un point A est la droite perpendiculaire en A au rayon [OA].

Donc les droites (Δ) et (OA) sont perpendiculaires.

De même, (*d*) est la tangente en B au cercle (𝒞) donc les droites (*d*) et (OB) sont perpendiculaires.

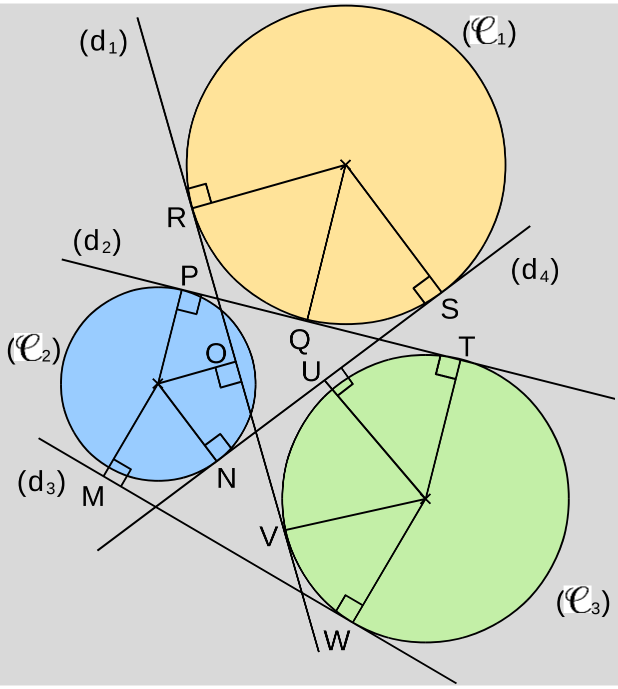
Les droites (Δ) et (*d*) sont perpendiculaires à la même droite (AB).

Propriété : si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième, alors elles sont parallèles entre elles.

Donc les droites (Δ) et (*d*) sont parallèles.

Exercice n°9 page 179

Observe la figure ci-contre et en te référant au codage, indique pour chacune des droites (d_1), (d_2), (d_3) et (d_4) à quel cercle et en quel point elles sont tangentes.



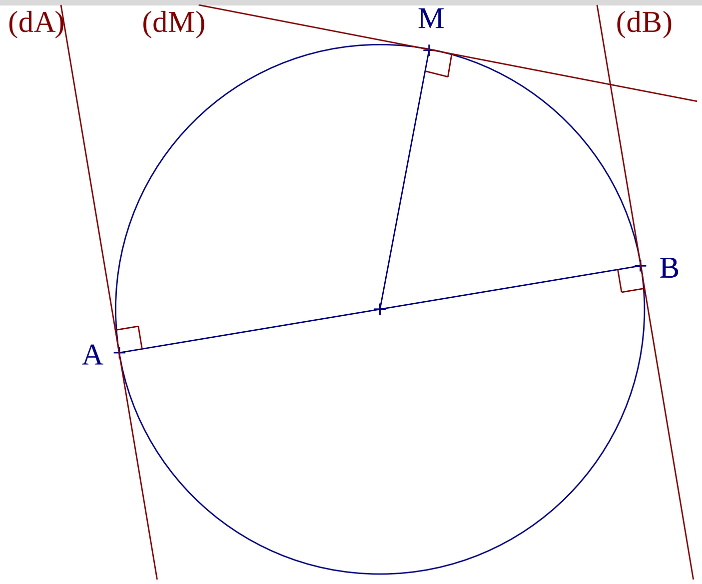
- (d_1) est tangente au cercle $(\mathscr{C}_1)$ au point R
- (d_2) est tangente au cercle $(\mathscr{C}_2)$ au point P et au cercle $(\mathscr{C}_3)$ au point T.

- (d_3) est tangente au cercle $(\mathscr{C}_3)$ au point W.
- (d_4) est tangente au cercle $(\mathscr{C}_1)$ au point S et au cercle $(\mathscr{C}_2)$ au point N.

Exercice n°10 page 180 *Un cercle et trois tangentes*

a) Trace un cercle $(\mathscr{C})$ de rayon 3,5 cm, trace un diamètre [AB] de ce cercle puis place un point M sur $(\mathscr{C})$ à 4 cm de B.

b) Construis trois tangentes (d_A), (d_B) et (d_M) en A, B et M au cercle $(\mathscr{C})$.

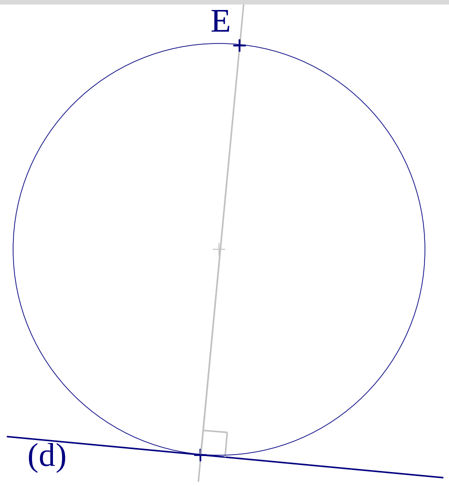


Exercice n°11 page 180 *Distances et tangentes*

a) Trace une droite (d) et place un point E à 5 cm de (d) puis trace le cercle $(\mathscr{C}_1)$ de diamètre 5 cm, passant par E et dont la droite (d) est une tangente.

b) Peux-tu tracer un cercle $(\mathscr{C}_2)$ de diamètre 4,6 cm passant par E et dont la droite (d) est une tangente ? Justifie.

a)

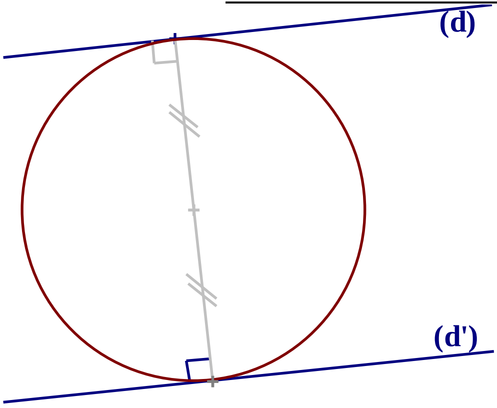


b) La plus grande distance entre un point du cercle $(\mathscr{C}_2)$ et la droite (d) est 4,6 cm, donc $\boxed{\text{non}}$, on ne peut pas tracer le cercle demandé.

Exercice n°12 page 180

Trace deux droites parallèles (d) et (d'). Construis un cercle $(\mathscr{C})$ tel que (d) et (d') soient toutes les deux tangentes à $(\mathscr{C})$.

Quelle est la position de son centre ?

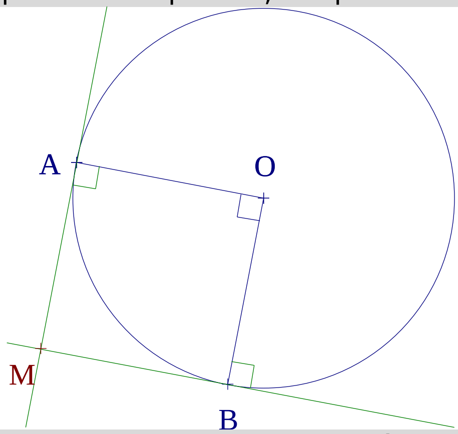


Le centre du cercle est équidistant des droites (d) et (d').

Exercice n°14 page 180 *Un quadrilatère bien connu*

a) Trace un cercle (𝒞) de centre O et deux rayons [OA] et [OB] perpendiculaires. Trace les tangentes à (𝒞) passant par A et B et place M, leur point d'intersection.

a)



b) Quelle est la nature du quadrilatère OAMB ? Justifie.

b) Comme (AM) est tangente au cercle (𝒞) de centre O en A, alors (AM) est perpendiculaire à (OA).

De même on obtient (BM) perpendiculaire à (OB).

Donc le quadrilatère OAMB a trois angles droits.

Propriété : un quadrilatère ayant trois angles droits est un rectangle.

Donc OAMB est un rectangle.

De plus on a OA = OB.

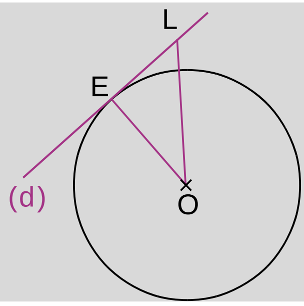
Propriété : un rectangle ayant deux côtés consécutifs de même longueur est un carré.

Donc le quadrilatère OAMB est un $\boxed{\text{carré}}$.

Exercice n°15 page 180

Sur la figure ci-contre, (d) est la tangente en E au cercle (𝒞) de centre O et L est un point appartenant à (d) tel que $\widehat{EOL} = 38°$.

Calcule, en justifiant, la mesure de l'angle $\widehat{OLE}$.



Comme (d) est tangente en E au cercle (𝒞) de centre O, alors (d) est perpendiculaire à (EO).

Dans le triangle EOL, on a $\widehat{EOL} = 38°$ et $\widehat{OEL} = 90°$.

Propriété : dans un triangle, la somme des angles est égale à 180°.

Donc $\widehat{OLE} = 180 - (38° + 90°) = 180° - 128° = \boxed{52°}$.

Activité n°3 page 175 *De qui est-ce la trace ?*

Dans cette activité, tu vas manipuler la figure TracenPoche disponible à l'adresse : http://manuel.sesamath.net dans les compléments du niveau 4e.

1) Nature d'une trace

a) Quel point peux-tu déplacer sur cette figure ? Quels points bougent alors automatiquement ? Comment, selon toi, a-t-on obtenu les points F et G ? Vérifie avec Tracenpoche.

b) Lorsqu'on déplace le point M, il laisse parfois une trace rouge.
Pour quelles positions du point M cela se produit-il ? Vérifie avec TracenPoche.
Déplace le point M afin d'avoir la plus grande trace rouge possible.

1) Nature d'une trace

a) On peut déplacer le point $\boxed{\text{M}}$. Les points $\boxed{\text{F et G}}$ bougent alors automatiquement.

Les points F et G sont les pieds des perpendiculaires à [Ax) et [Ay) passant par M.

b) Le point M laisse une trace rouge lorsque $\boxed{\text{MF = MG}}$.

2) Une conjecture

a) À l'aide du bouton, trace la bissectrice de $\widehat{xAy}$. Que remarques-tu ?

b) Place un point N sur la bissectrice de $\widehat{xAy}$ en utilisant le bouton.

c) Une fois les constructions nécessaires effectuées, fais afficher les distances de N à chacun des deux côtés de l'angle. Que remarques-tu lorsque tu déplaces N ?

d) Complète les deux propriétés suivantes (qu'on utilise dans la Méthode 3 et qu'on démontre dans l'exercice 38.) :
« Si un point est situé … des côtés d'un angle alors il appartient à … . »,
et réciproquement : « Si un point appartient à … alors il est situé … de cet angle. ».

2) Une conjecture

a) La bissectrice de $\widehat{xAy}$ et la trace rouge se confondent.

b)

c) Lorsqu'on déplace N, on remarque que N est toujours équidistant des deux côtés de l'angle.

d) Si un point est situé $\boxed{\text{à la même distance}}$ des côtés d'un angle alors il appartient à $\boxed{\text{sa bissectrice}}$.

Si un point appartient à $\boxed{\text{la bissectrice d'un angle}}$ alors il est situé $\boxed{\text{à la même distance des côtés}}$ de cet angle.

Activité n°4 page 175 *Un cercle bien calé*

1) Construction et observation

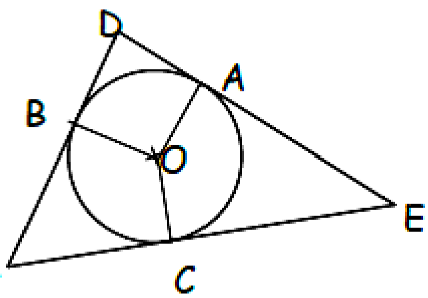
a) Avec TracenPoche, à l'aide du bouton, construis un cercle de centre O et de rayon trois unités de longueur. Place trois points A, B et C sur ce cercle, trace les trois rayons [OA], [OB] et [OC] puis les trois tangentes au cercle en ces points.

b) Déplace si besoin A, B et C afin que ces trois tangentes forment un triangle contenant le cercle. Nomme D, E et F les trois sommets de ce triangle.

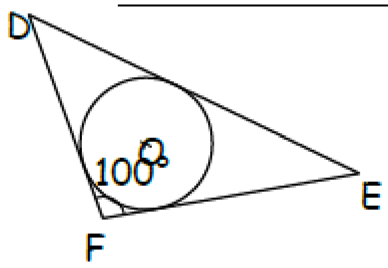
1) Construction et observation

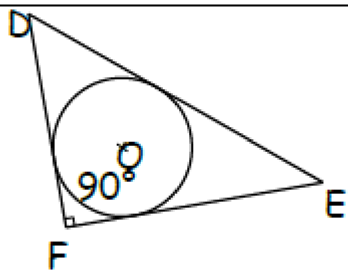
a)

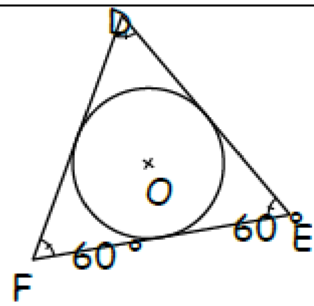
b)



c) Utilise TracenPoche pour dire si le triangle DEF peut posséder un angle obtus. Peut-il être rectangle ? Peut-il être équilatéral ? Précise alors la position du centre du cercle.

c) 





Dans tous les cas de figure O est à égale distance des trois côtés du triangle ABC.

Oui, le triangle DEF peut posséder un angle obtus.

Oui, le triangle DEF peut être rectangle.

Oui, le triangle DEF peut être équilatéral. Le point O est alors le centre de gravité du triangle.

d) O est-il plus proche de (DE) ou de (DF) ? Justifie. Que peut-on en déduire concernant le point O et l'angle $\widehat{EDF}$? Et que dire du point O et des angles $\widehat{DFE}$ et $\widehat{FED}$? Vérifie ta réponse à l'aide de TracenPoche en effectuant les tracés nécessaires.

d) [OA] et [OB] sont deux rayons du cercle, donc OA = OB.

Non, O est équidistant de (DE) et de (DF).

Donc O appartient à la bissectrice de l'angle $\widehat{EDF}$.

De même O appartient aux bissectrices des angles $\widehat{DFE}$ et $\widehat{FED}$.

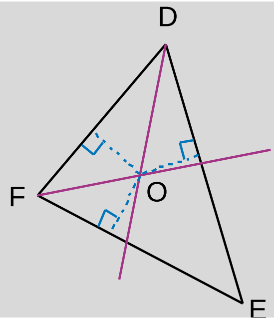
2) Mise en situation et démonstration

a) Sur ton cahier, trace un grand triangle DEF puis les bissectrices des angles $\widehat{EDF}$ et $\widehat{DFE}$ qui se coupent en O.

b) Démontre que O est équidistant des trois côtés du triangle DEF.

c) Comment tracer la bissectrice de $\widehat{FED}$ en n'utilisant que ta règle non graduée ? Justifie.

d) En t'inspirant de la première partie, trace un cercle particulièrement intéressant !



2) Mise en situation et démonstration

a)

b) O est le point de concours des bissectrices de $\widehat{EDF}$ et $\widehat{DFE}$.

Propriété : si un point appartient à la bissectrice d'un angle, alors il est situé à la même distance des côtés de cet angle.

Donc O est à la même distance de [ED], [EF] et [DF].

c) Dans le triangle DEF, O est le point de concours des bissectrices de $\widehat{EDF}$ et $\widehat{DFE}$.

Propriété : dans un triangle, les bissectrices des angles sont concourantes.

Donc les bissectrices de DEF sont concourantes en O.

La bissectrice de $\widehat{FED}$ est la droite (OE).

d) On peut tracer le cercle inscrit dans le triangle DEF.

3 BISSECTRICE D'UN ANGLE ET CERCLE INSCRIT

EX 7 À 9

THÉORÈME 2 :

- Si un point est situé à la même distance des côtés d'un angle alors il appartient à la **bissectrice** de cet angle.
- Réciproquement, si un point appartient à la bissectrice d'un angle alors il est situé à **la même distance des côtés de cet angle**.

Exemple 4 :

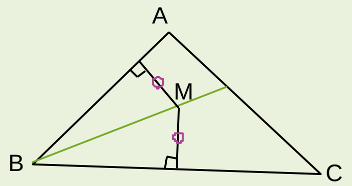
Soit un triangle ABC. Place à l'intérieur du triangle un point M afin qu'il soit à égale distance des

côtés [AB] et [BC].

Le point M se situe à égale distance des côtés [AB] et [BC].

Propriété : si un point est situé à la même distance des côtés d'un angle, alors il appartient à la bissectrice de cet angle.

Donc le point M se situe sur la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ formé par les segments [AB] et [BC].

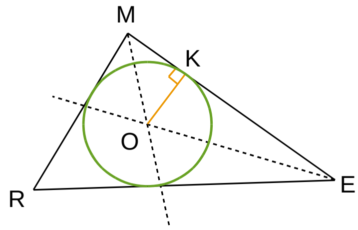


Théorème 2 :

Les trois bissectrices des angles d'un triangle sont concourantes.
Leur point de concours est le **centre du cercle inscrit** dans le triangle.

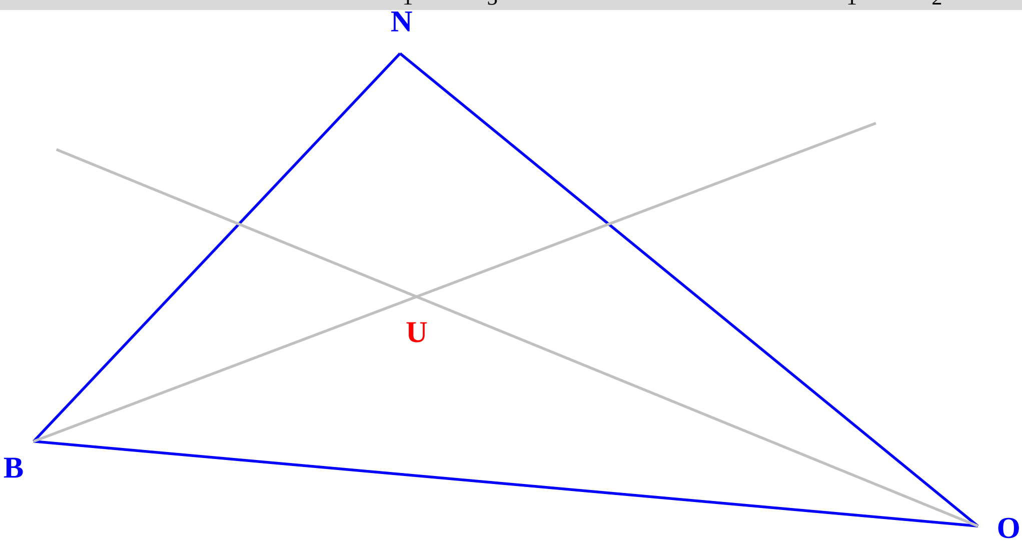
Remarque 3 :

Les trois côtés d'un triangle sont tangents au cercle inscrit dans ce triangle.



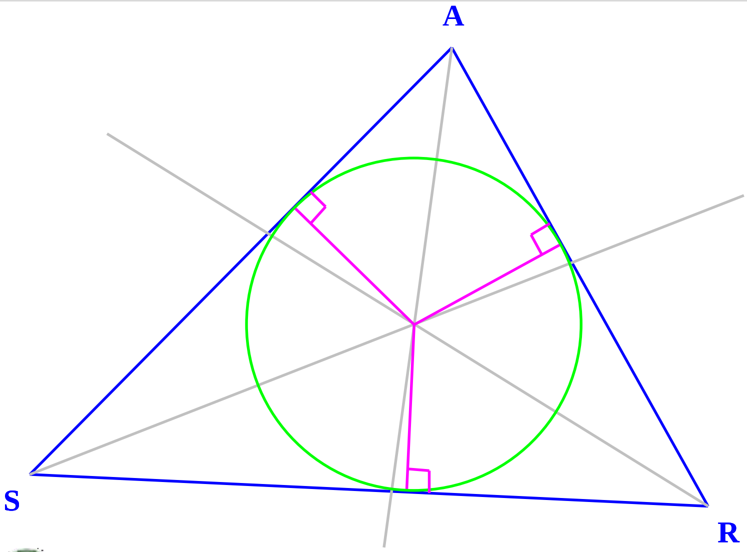
Exercice n°7 page 178

Construis un triangle BON. On note (d_1) la droite (BO), (d_2) la droite (ON) et (d_3) la droite (BN). Place le point U afin qu'il soit équidistant des droites (d_1) et (d_3) et équidistant des droites (d_1) et (d_2).



Exercice n°8 page 178

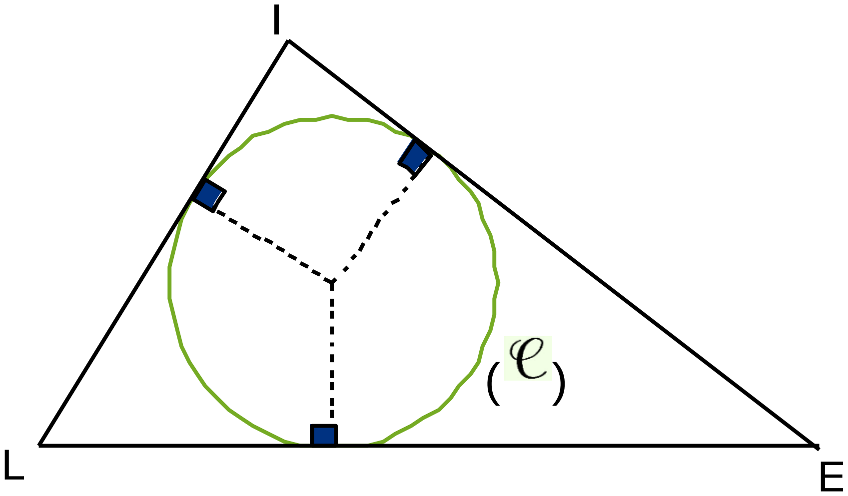
Construis un triangle RAS tel que RA = 7 cm ; AS = 8 cm et RS = 9 cm puis son cercle inscrit.



Exercice n°9 page 178

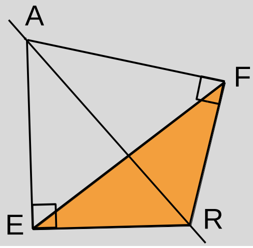
Soit un cercle ($\mathscr{C}$).

Trace un triangle ILE tel que ($\mathscr{C}$) soit inscrit dans le triangle ILE.



Exercice n°17 page 180

Sur la figure ci-contre, la droite (AR) est la bissectrice de l'angle $\widehat{EAF}$.
Démontre que le triangle FER est isocèle en R.



On sait que R est sur la bissectrice de l'angle $\widehat{EAF}$.

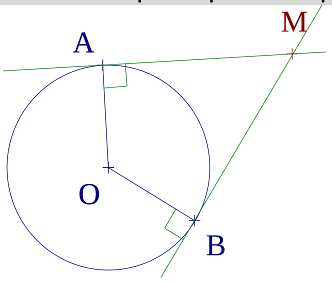
Propriété : si un point appartient à la bissectrice d'un angle, alors il est situé à la même distance des côtés de cet angle.

Donc RE = RF. D'où le triangle FER est isocèle en R.

Exercice n°19 page 180

Trace un cercle ($\mathscr{C}$) de centre O puis place deux points A et B non diamétralement opposés sur ce cercle. Trace les tangentes en A et en B au cercle ($\mathscr{C}$) et place M, leur point d'intersection.

Démontre que le point O appartient à la bissectrice de l'angle $\widehat{AMB}$.



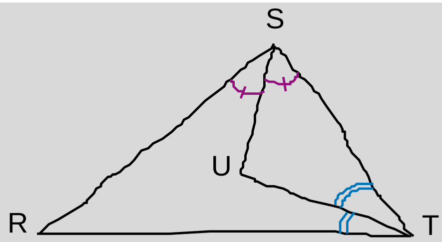
On a OA = OB, (OA) ⊥ (AM) et (OB) ⊥ (BM), soit O est à la même distance de (AM) et de (BM).

Propriété : si un point est situé à la même distance des côtés d'un angle, alors il appartient à la bissectrice de cet angle.

Donc O appartient à la bissectrice de l'angle $\widehat{AMB}$.

Exercice n°20 page 181

Observe le dessin à main levée ci-contre.
Démontre que le point U est équidistant des droites (RS) et (RT).



On a d'une part $\widehat{RSU} = \widehat{SUT}$ et d'autre part $\widehat{STU} = \widehat{RTU}$.

Propriété : la bissectrice d'un angle est la demi-droite qui partage cet angle en deux angles adjacents de même mesure.

Donc, d'une part (SU) est la bissectrice de l'angle $\widehat{RST}$, et d'autre part (TU) est la bissectrice de l'angle $\widehat{RTS}$.

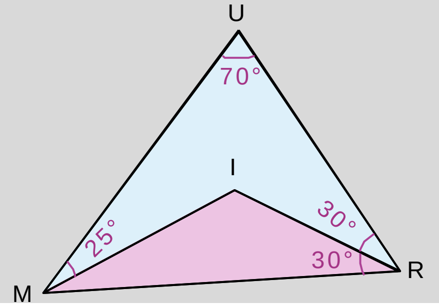
Propriété : si un point appartient à la bissectrice d'un angle, alors il est situé à la même distance des côtés de cet angle.

Donc, d'une part U est à la même distance de (RS) et de (ST), et d'autre part U est à la même distance de (ST) et de (RT).

D'où U est équidistant des droites (RS) et (RT).

Exercice n°21 page 181 *Une histoire d'angles*

a) Détermine, en justifiant, la mesure de l'angle $\widehat{IMR}$.
b) Que représente le point I pour le triangle MUR ? Justifie.
c) Déduis-en les mesures des angles $\widehat{MUI}$ et $\widehat{MIU}$.



a) Dans le triangle MUR, on a $\widehat{MUR} = 70°$ et $\widehat{MRU} = 60°$.

Propriété : dans un triangle, la somme des angles est égale à 180°.

Donc $\widehat{UMR} = 180° - (70° + 60°) = 180° - 130° = 50°$.

De plus on a $\widehat{UMI} = 25°$, d'où $\widehat{IMR} = 50° - 25° = \boxed{25°}$.

b) On a, d'une part $\widehat{UMI} = \widehat{IMR}$, et d'autre part $\widehat{URI} = \widehat{IRM}$.

Propriété : la bissectrice d'un angle est la demi-droite qui partage cet angle en deux angles adjacents de même mesure.

Donc, d'une part (MI) est la bissectrice de $\widehat{UMR}$, et d'autre part (RI) est la bissectrice de $\widehat{MRU}$.

On en déduit que I est le point de concours des bissectrices du triangle MUR, c'est donc le centre du cercle inscrit au triangle MUR.

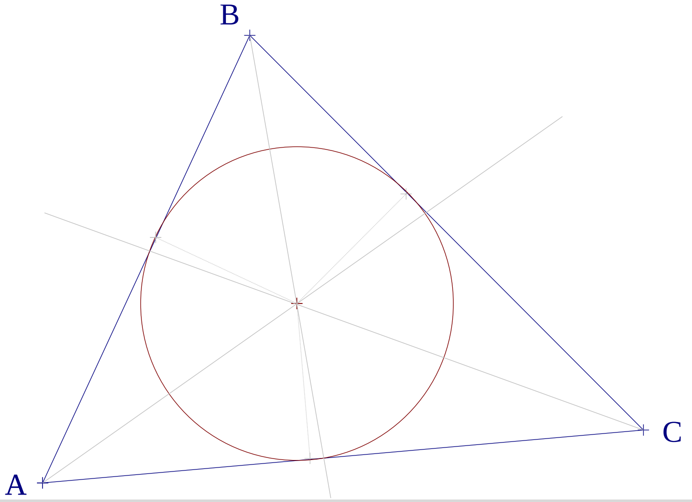
c) Comme I est le point d'intersection des bissectrices du triangle MUR, alors (UI) est la bissectrice de l'angle $\widehat{MUR}$, et donc $\widehat{MUI} = \widehat{MIU} = \dfrac{\widehat{MUR}}{2} = \dfrac{70°}{2} = \boxed{35°}$.

Exercice n°22 page 181 *Cercle inscrit*

Dans chaque cas, construis le triangle ABC puis son cercle inscrit.

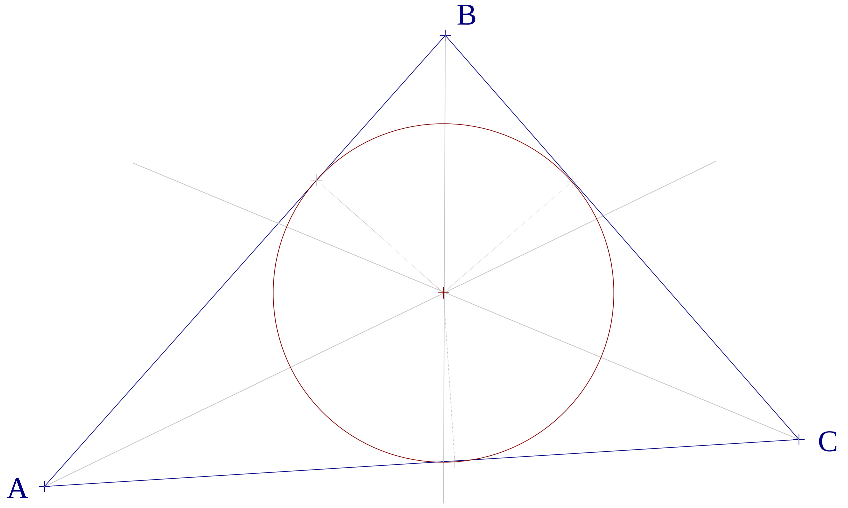
a) AC = 8 cm, $\widehat{BAC} = 60°$ et $\widehat{ACB} = 50°$.

a)



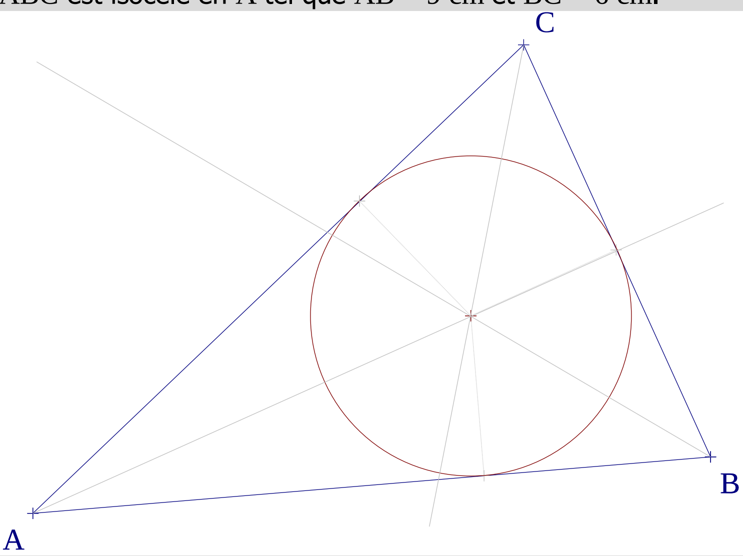
b) AC = 10 cm, AB = 8 cm et $\widehat{BAC} = 45°$.

b)



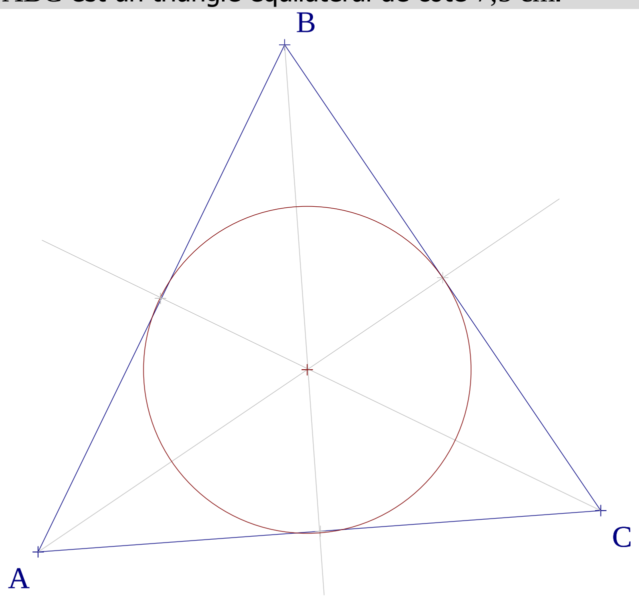
c) ABC est isocèle en A tel que AB = 9 cm et BC = 6 cm.

c)



d) ABC est un triangle équilatéral de côté 7,5 cm.

d)

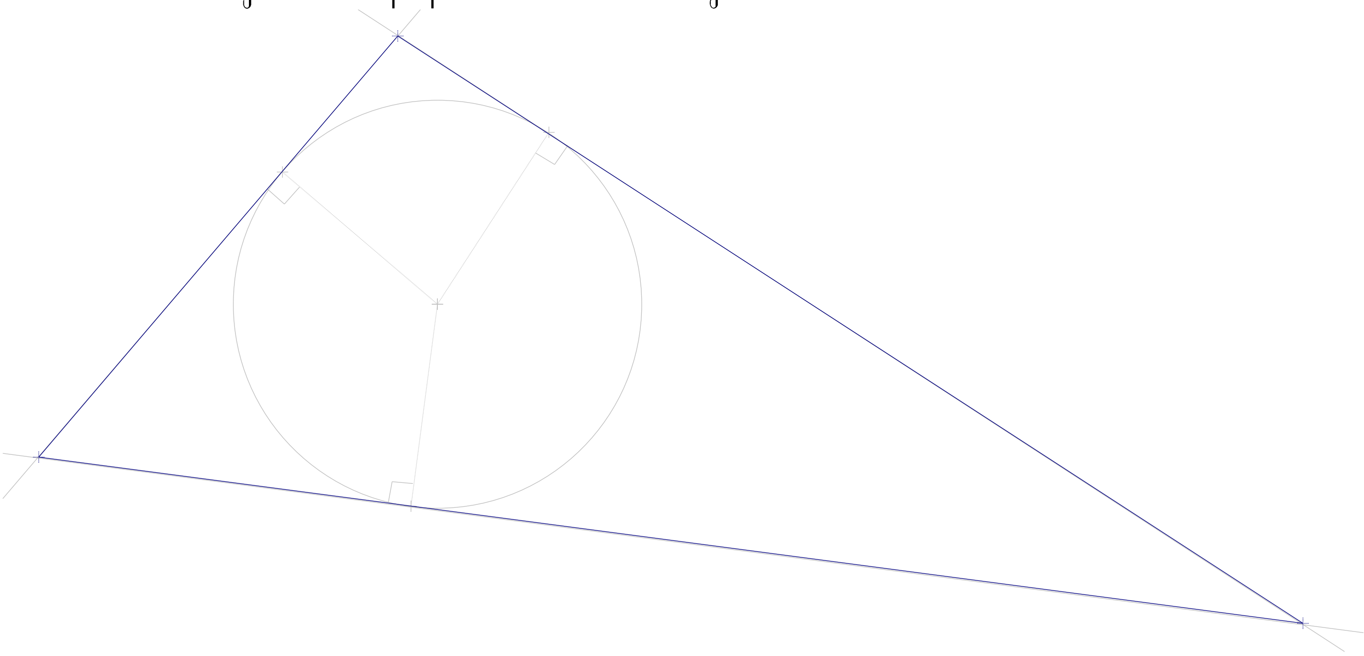


Exercice n°23 page 181

Trace un triangle dont le cercle inscrit a un rayon de 2,7 cm.

On trace un cercle de rayon 2,7 cm, puis trois rayons de ce cercle.

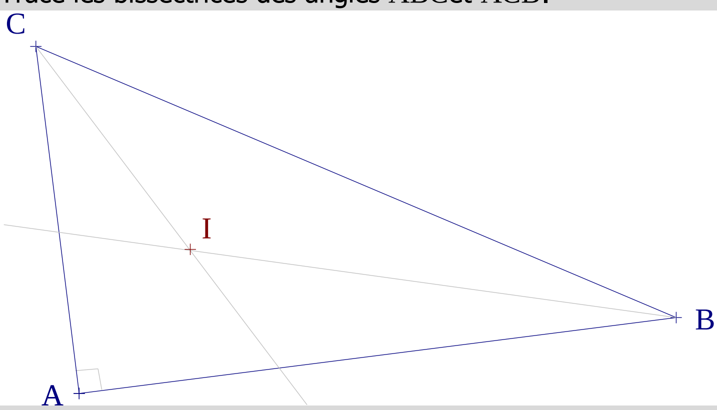
Les côtés du triangle sont les perpendiculaires aux rayons.



Exercice n°24 page 181 *Une histoire d'angles, bis*

a) Trace un triangle ABC rectangle en A tel que AB = 8 cm et $\widehat{ABC}$ = 30°.
Trace les bissectrices des angles $\widehat{ABC}$et $\widehat{ACB}$.

a)



b) On appelle I le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC.
Calcule, dans cet ordre, les angles $\widehat{ACB}$, $\widehat{ICA}$, $\widehat{CAI}$ et $\widehat{AIC}$.

b)

- Dans le triangle ABC, on sait que $\widehat{BAC}$ = 90° et $\widehat{ABC}$ = 30°.
  Propriété : dans un triangle, la somme des angles est égale à 180°.
  Donc $\widehat{ACB} = 180° – (90° + 30°) = 180° – 120° = \boxed{60°}$.
- Comme (IC) est la bissectrice de l'angle $\widehat{ACB}$, alors $\widehat{ICA} = \dfrac{\widehat{ACB}}{2} = \dfrac{60°}{2} = \boxed{30°}$.
- Comme I est le point de concours des bissectrices du triangle ABC, alors (IA) est la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$. D'où $\widehat{CAI} = \dfrac{\widehat{BAC}}{2} = \dfrac{90°}{2} = \boxed{45°}$.
- Dans le triangle AIC, on sait que $\widehat{CAI}$ = 45° et $\widehat{ICA}$ = 30°.
  Propriété : dans un triangle, la somme des angles est égale à 180°.
  Donc $\widehat{AIC} = 180° – (45° + 30°) = 180° – 75° = \boxed{105°}$.