

Ch.G1 : Triangle rectangle

1 CERCLE ET TRIANGLE RECTANGLE

1.1 Pour démontrer qu'un point est sur un cercle

ex 1 et 2

THEOREME 1

Si un **triangle est rectangle**,
alors **son cercle circonscrit** a pour diamètre son hypoténuse.

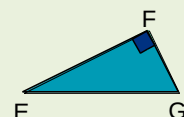
Remarque 1 :

Voici une autre manière d'énoncer ce théorème : « Si un triangle est rectangle, alors il est inscrit dans un demi-cercle ayant pour diamètre son hypoténuse. »

Exemple 1 :

Soit EFG un triangle rectangle en F. Démonstre que le point F appartient au cercle de diamètre [EG].

Solution :



Données	Propriété	Conclusion
Le triangle EFG est rectangle en F.	Si un triangle est rectangle alors son cercle circonscrit a pour diamètre son hypoténuse.	Le point F appartient au cercle de diamètre [EG].

1.2 Longueur de la médiane

ex 3

THEOREME 2

Si un **triangle est rectangle**,
alors **la médiane issue du sommet de l'angle droit** a pour longueur la moitié de la longueur de l'hypoténuse.

Remarque 2 :

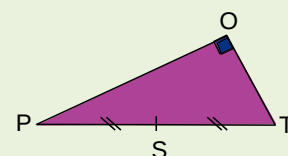
Voici une autre manière d'énoncer ce théorème : « Si un triangle est rectangle alors le milieu de son hypoténuse est à égale distance des trois sommets du triangle. »

Exemple 2 :

Le triangle POT est un triangle rectangle en O tel que TP = 8 cm. Le point S est le milieu du segment [TP]. Quelle est la longueur du segment [SO] ?

Solution :

Étape préliminaire : Dans le triangle POT rectangle en O, [OS] joint le sommet O et le milieu S de [TP] donc [OS] est la médiane issue du sommet de l'angle droit O.



Données	Propriété	Conclusion
Le triangle POT est rectangle en O, [OS] est la médiane issue du sommet de l'angle droit O, TP = 8 cm.	Si un triangle est rectangle, alors la médiane issue du sommet de l'angle droit a pour longueur la moitié de la longueur de l'hypoténuse.	$OS = \frac{1}{2} TP$ $OS = \frac{1}{2} \times 8 \text{ cm}$ $OS = 4 \text{ cm}$

1.3 Pour démontrer qu'un triangle est rectangle

ex 4 à 6

THEOREME 3

Si **un triangle est inscrit dans un cercle de diamètre l'un de ses côtés**,
alors **il est rectangle** et admet ce diamètre pour hypoténuse.

Exemple 3 :

**Trace le cercle de diamètre [SR] tel que $SR = 7$ cm puis place sur ce cercle un point H tel que $RH = 4$ cm.
Démontre que le triangle RHS est rectangle en H.**

Solution :

Données	Propriété	Conclusion
Le point H appartient au cercle de diamètre [SR].	Si un triangle est inscrit dans un cercle de diamètre l'un de ses côtés alors ce triangle est rectangle et admet ce diamètre pour hypoténuse.	Le triangle RHS est rectangle en H.

THEOREME 4

Si, dans un triangle, la longueur de la médiane relative à un côté est égale à la moitié de la longueur de ce côté, alors ce triangle est rectangle et admet ce côté pour hypoténuse.

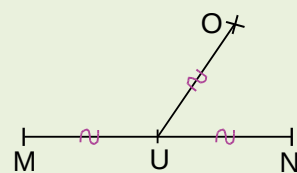
Exemple 4 :

**MON est un triangle, U est le milieu de [MN] et on a : $MN = 8$ cm ;
 $OU = 4$ cm.
Démontre que le triangle MON est rectangle en O.**

Solution :

Étape préliminaire : Dans le triangle MON, [OU] joint le sommet O et le milieu U de [MN] donc [OU] est la médiane relative au côté [MN].

Données	Propriété	Conclusion
Dans le triangle MON, [OU] est la médiane relative au côté [MN], $MN = 8$ cm et $OU = 4$ cm.	Si, dans un triangle, la longueur de la médiane relative à un côté est égale à la moitié de ce côté alors ce triangle est rectangle et admet ce côté pour hypoténuse.	Le triangle MON est rectangle en O.



2 THEOREME DE PYTHAGORE

2.1 Théorème direct

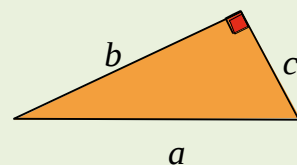
ex 7 à 9

THEOREME DE PYTHAGORE

Si un triangle est rectangle, alors le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.

Exemple 5 :

Le triangle ci-contre est rectangle, donc $a^2 = b^2 + c^2$.



Exemple 6 : Calcul de la longueur d'un côté de l'angle droit

Soit RAS un triangle rectangle en A tel que $RS = 9,7$ cm et $RA = 7,2$ cm. Calcule AS.

Solution :

Le triangle RAS est rectangle en A, son hypoténuse est le côté [RS]. Donc, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$RS^2 = RA^2 + AS^2$$

$$9,7^2 = 7,2^2 + AS^2$$

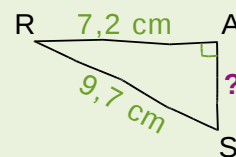
$$AS^2 = 9,7^2 - 7,2^2$$

$$AS^2 = 94,09 - 51,84$$

$$AS^2 = 42,25.$$

$$AS = \sqrt{42,25} \text{ cm.}$$

$$\text{Donc } AS = 6,5 \text{ cm.}$$



Exemple 7 :

**NUL est un triangle tel que $NU = 42$ cm ; $LU = 46$ cm et $LN = 62$ cm.
Démontrez que NUL n'est pas un triangle rectangle.**

Solution :

Remarque préliminaire : Si ce triangle est rectangle, seul le côté [LN] peut être son hypoténuse car c'est le côté le plus long.

Dans le triangle NUL, le plus long côté est [LN], donc on **calcule séparément** LN^2 et $LU^2 + NU^2$:

D'une part, $LN^2 = 62^2 = 3\,844$.

D'autre part, $LU^2 + NU^2 = 46^2 + 42^2 = 2\,116 + 1\,764 = 3\,880$.

On constate que $LN^2 \neq LU^2 + NU^2$.

Or si le triangle était rectangle, d'après le théorème de Pythagore, il y aurait égalité.

Comme ce n'est pas le cas, le triangle NUL n'est pas rectangle.

2.2 Réciproque du théorème de Pythagore

ex 10 et 11

RECIPROQUE DU THEOREME DE PYTHAGORE

Si, **dans un triangle, le carré de la longueur du plus grand côté est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés,**
alors ce triangle est rectangle et admet ce plus grand côté pour hypoténuse.

Exemple 8 :

**NEZ est un triangle tel que $NE = 75$ cm ; $EZ = 45$ cm et $NZ = 60$ cm.
Démontrez que ce triangle est rectangle.**

Solution :

Dans le triangle NEZ, le plus long côté est [NE], donc on **calcule séparément** NE^2 et $EZ^2 + NZ^2$:

D'une part, $NE^2 = 75^2 = 5\,625$.

D'autre part, $EZ^2 + NZ^2 = 45^2 + 60^2 = 2\,025 + 3\,600 = 5\,625$.

On constate que $NE^2 = EZ^2 + NZ^2$.

Donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle NEZ est rectangle en Z.